אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 08/03/2022, 09:00
שם המרצה: ד"ר שירה צ'פמן
שם המתרגל: מר אסף ארזי
שם הקורס: תורת הכבידה 1
מספר הקורס: 203.1.4181
שנה: 2021/22 סמסטר: א' מועד: ב'
משך הבחינה: 4 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות המצורף לטופס

יש לענות על 3 שאלות בלבד (בחירה מתוך 4) ולציין בתחילת מחברת הבחינה אילו שאלות בחרתם. אחרת, יבדקו שלוש השאלות המופיעות ראשונות מתחילת המחברת.

ערך כל שאלה הוא 40 נקודות.

**1. חצי מישור לורנץ-פואנקרה (40 נקודות)**

נתונה מטריקה

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(-dt^2 + dx^2)$$

כאשר $t > 0, -\infty < x < \infty$.

א. הראו שלוקח זמן עצמי אינסופי להגיע מכל נקודה בחצי המישור העליון אל נקודה על ציר ה-$x$ לאורך מסלול ישר המקביל לציר ה-$t$. **(5 נקודות)**

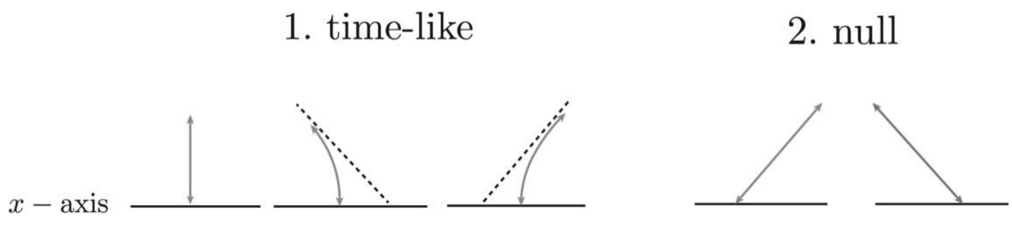
ב. כתבו את המשוואות הגיאודזיות. **(7 נקודות)**

ג. מצאו גודל שמור בתנועה לאורך הגאודזות. **(5 נקודות)**

ד. כתבו את משוואת נרמול המהירות עבור גאודזות דמויות זמן. הראו שהגאודזות דמויות-זמן (*timelike*) הן חצאי היפרבולות עם רדיוס בריבוע חיובי המשיקות לקונוסי האור, או קווים מאונכים לציר $x$. **(8 נקודות)**

ה. הראו שהגאודזות דמויות-אור הן קוים בזווית של $\pm 45$ מעלות מציר ה-$x$. **(7 נקודות)**

ו. הוכיחו על ידי חישוב סקלר העקמומיות שזהו מרחב דה-סיטר (דו מימדי). **(8 נקודות)**




טל. 08-6461655/6/7
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 examunit@bgu.ac.il

**2. מטריקת שוורצשילד בקואורדינטות הרמוניות (40 נקודות)**

בכל סעיף ניתן להשתמש בסעיפים קודמים כנתון גם אם לא פתרתם אותם.

נתונה הזהות $\Gamma^{\rho}_{\rho\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\sqrt{|g|}$

א. הוכיחו את הזהות של דיברגנס **(6 נקודות)**

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)$$

ב. הוכיחו את הזהות של לפלסיאן **(6 נקודות)**

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu f\right)$$

ג. כתבו את הלפלסיאן (הפועל על פונקציה סקלרית) בגיאומטריית שוורצשילד, בקואורדינטות שוורצשילד $(t, r, \theta, \phi)$. **(10 נקודות)**

ד. הראו שהקואורדינטות הכמו-קרטזיות $(t, x, y, z)$ הבאות הן קואורדינטות הרמוניות בגיאומטריית שוורצשילד. **(10 נקודות)**

$$t = t$$
$$x = (r - M)sin\theta cos\phi$$
$$y = (r - M)sin\theta sin\phi$$
$$z = (r - M)cos\theta$$

ה. כתבו את אלמנט האורך של גיאומטרית שוורצשילד בקואורדינטות הספריות המוגדרות מתוך הקואורדינטות ההרמוניות הנ"ל, כלומר $(t, R, \theta, \phi)$, כך ש- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. היכן ממוקם האופק במונחי הקואורדינטות החדשות הנ״ל? **(8 נקודות)**

**3. יצירת גלי כבידה על ידי מוט מסתובב (40 נקודות)**

מוט אחיד דק בעל מסה $M$ ואורך $L$ מסתובב במישור $xy$ בתדירות זוויתית $\Omega$.

א. חישוב גלי הכבידה הנוצרים הוא בקירובים בהם שדה הכבידה של המוט חלש (גם באזור המוט עצמו) ומהירותו נמוכה. בטאו קירובים אלה לפי הפרמטרים של השאלה, ביחידות גיאומטריות $G = c = 1$. **(8 נקודות)**

ב. חשבו את מומנט הקוודרופול $(I_{i'j'})$ של המוט במערכת המסתובבת יחד איתו. **(8 נקודות)**

ג. חשבו את גלי הכבידה (ההפרעה $\bar{h}_{ij}$) אשר יוצר המוט במערכת אינרציאלית. **(8 נקודות)**

ד. חשבו את הספק הקרינה. **(8 נקודות)**

ה. בהנחה שבעקבות איבוד האנרגיה התדירות הזוויתית משתנה, אך רדיוס המוט לא משתנה, מצאו את התאוצה הזוויתית של המוט. **(8 נקודות)**

**4. יקום נתון (40 נקודות)**

נתון מודל קוסמולוגי הומוגני ואיזוטרופי המתואר על ידי המטריקה

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{4}{3}}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

כאשר $t_*$ קבוע.

א. האם היקום פתוח, סגור או שטוח? **(10 נקודות)**

ב. מצאו את צפיפות האנרגיה הכוללת ביקום $\rho(t)$. **(10 נקודות)**

ג. האם המודל מתאר יקום הנשלט על ידי קרינה? **(10 נקודות)**

ד. בהנחה שגיל היקום הוא $14Gyr$, חשבו את קבוע האבל הנצפה היום (ביחידות של $yr^{-1}$). **(10 נקודות)**

***בהצלחה!***

טל. 08-6461655/6/7
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 examunit@bgu.ac.il

# דף נוסחאות: תורת הכבידה 1

## נוסחאות כלליות

החלפת קואורדינטות במטריקה

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

חוק טרנספורמציה של טנזור כללי

$$T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_k'}{}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_\ell'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_\ell}}{\partial x^{\nu_\ell'}} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell}$$

סימני קריסטופל

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

נגזרת קוואריאנטית

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^\lambda \qquad \nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_\lambda$$

נגזרת קוואריאנטית של המטריקה

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}$$

נגזרת קוואריאנטית של טנזור כללי

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell} =& \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell} \\ & + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_\ell} + \cdots \\ & - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_\ell} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_\ell} + \cdots\end{aligned}$$

טנזור העקמומיות של רימאן

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} \qquad R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

זהויות וקשרים בטנזור העקמומיות של רימאן

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

זהויות ביאנקי

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \qquad \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

טנזור וסקלר העקמומיות של ריצ'י

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \qquad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

טנזור איינשטיין וזהות ביאנקי

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} \qquad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

משוואת איינשטיין עם קבוע קוסמולוגי $\Lambda$ -

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

(לחילופין, יש שנוהגים לכלול את הקבוע הקוסמולוגי בהגדרת טנזור התנע-אנרגיה)

## המשוואה הגאודזית

לגרנזיאן עבור המשוואה הגאודזית של חלקיק בוחן עם פרמטר שרירותי $\sigma$ לאורך קו העולם של החלקיק $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$:

$$L\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}$$

משוואה גאודזית עבור חלקיק בוחן במונחי הזמן העצמי $\tau$

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \qquad \text{או} \qquad \frac{du^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

היכן ש $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ היא מהירות החלקיק בבסיס הקואורדינטה $u \cdot u = -1$. משוואה גאודזית של קרני אור דומה עד כדי החלפת הזמן העצמי בפרמטר אפיני $\lambda$ ועם נרמול $u \cdot u = 0$.

גדלים נשמרים $\xi \cdot u = \text{const}$ היכן ש $\xi$ וקטור קילינג, למשל $\xi^\alpha = (0,1,0,0)$ בבסיס קואורדינטה שבו המטריקה $g_{\alpha\beta}(x)$ בלתי תלויה בקואורדינטה $x^1$.

## מרחבים חשובים

(אפשר לעבוד ביחידות גאומטריות $c = G = 1$)

מרחב-זמן שטוח 4 ממדי בקואורדינטות קרטזיות

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

מרחב-זמן שטוח 4 ממדי בקואורדינטות פולריות

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

מטריקה של שדה חלש

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad \frac{\Phi(x^i)}{c^2} \ll 1$$

גאומטריית שוורצשילד בקואורדינטות שוורצשילד

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

גאומטריית שוורצשילד בקואורדינטות אדינגטון-פינקלשטיין ביחידות גאומטריות

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

היכן שהקואורדינטה החדשה $v$ קשורה לאלו הקודמות בקשר

$$t = v - r - 2M\log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

טל. 08-6461655/6/7
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 examunit@bgu.ac.il

## בסיסי קואורדינטה ובסיסים אורתונורמליים

אוסף וקטורי בסיס $\{\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\}$ בבסיס אורתונורמלי מקיימים: $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(x)\cdot\mathbf{e}_{\hat{\beta}}(x)=\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$

אוסף וקטורי בסיס $\{\boldsymbol{e}_{\alpha}\}$ בבסיס הקואורדינטה המתאים לבחירת קואורדינטות $x^\alpha$ כלשהי מקיימים: $\mathbf{e}_{\alpha}(x)\cdot\mathbf{e}_{\beta}(x)=g_{\alpha\beta}(x)$

היכן שאלמנט האורך לובש את הצורה $ds^2=g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ במונחי אותן הקואורדינטות.

בבסיסים שבהם המטריקה אלכסונית $g_{\alpha\beta}(x)=0$ לכל $\alpha\neq\beta$, ניתן לכתוב בסיס <u>אורתונורמלי</u> שרכיביו בבסיס הקואורדינטה הם

$$(\mathbf{e}_{\hat{0}})^\alpha=[(-g_{00})^{-1/2},0,0,0],\qquad(\mathbf{e}_{\hat{1}})^\alpha=[0,(g_{11})^{-1/2},0,0],\qquad\text{etc.}$$

מדידה: $E=m\gamma=m(1-(v/c)^2)^{-1/2}=-p\cdot u_{obs}$

## גלי כבידה

מטריקה לינארית של גלי גרביטציה עבור הפרעה $h_{\alpha\beta}$ קטנה

$$ds^2=-(c\,dt)^2+dx^2+dy^2+dz^2+h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

כיול הרמוני (או כיול לורנץ) עבור גלי כבידה נתון ע"י

$$\Box x^\alpha=0\quad\Rightarrow\quad\partial_\mu\bar{h}^\mu{}_\nu=0,\qquad\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,\qquad h\equiv\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

היכן שמתייחסים ל- $x^\alpha$ כפונקציות סקלריות תחת הפעלת הדלאמברטיאן.

בכיול לורנץ משוואות איינשטיין בריק לובשות את הצורה $\Box h_{\alpha\beta}=0$.

אם בנוסף עובדים בכיול transverse traceless עבור גל הנע בכיוון ציר $z$ ההפרעה לובשת את הצורה:

$$h_{\alpha\beta}(t,z)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&f_+(t-z)&f_\times(t-z)&0\\0&f_\times(t-z)&-f_+(t-z)&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

היכן שהפונקציות הכלליות $f_+,f_\times$, ניתנות לפירוק פוריה באמצעות גלים מישוריים $e^{i\omega(z-t)}$.

<u>יצור גלי כבידה</u>: נוסחת הקוואדרופול (היכן ש $\mu$ היא צפיפות המסה, במקרה של מספר מקורות בדידים האינטגרל מוחלף בסכום, הנוסחה תקפה עבור מקור מבודד):

$$\bar{h}^{ij}(t,r)=\frac{2G}{c^4r}\frac{d^2}{dt^2}I^{ij}(t-r/c)\qquad I^{ij}(t)\equiv\int d^3x\mu(t,\vec{x})x^ix^j\qquad\begin{pmatrix}\text{weak source,}\\\text{low velocities,}\\\text{large }r\end{pmatrix}$$

הספק הקרינה בגלי כבידה (אנרגיה ליחידת זמן) היכן ש $\langle\cdots\rangle$ מסמל ממוצע על זמן מחזור

$$P_{\rm GW}=-\frac{G}{5c^5}\left\langle\frac{d^3J^{ij}}{dt^3}\frac{d^3J_{ij}}{dt^3}\right\rangle\qquad J_{ij}\equiv I_{ij}-\frac{1}{3}I\delta_{ij},\qquad I\equiv I_{ij}\delta^{ij}$$

## קוסמולוגיה

מודלים קוסמולוגיים של Friedman-Robertson-Walker:

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \begin{Bmatrix} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{Bmatrix}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right], \qquad \begin{Bmatrix} \text{closed} \\ \text{flat} \\ \text{open} \end{Bmatrix}$$

לחילופין

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right], \qquad \begin{Bmatrix} k=+1, & \text{closed} \\ k=0, & \text{flat} \\ k=-1, & \text{open} \end{Bmatrix}$$

היכן ש$a(t)$, פקטור הסקלה. קבוע האבל מוגדר ע"י $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$.

משוואת פרידמן הראשונה (עם קבוע קוסמולוגי $\Lambda$ ועקמומיות מרחבית $k$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

לחילופין, ניתן לבלוע את הקבוע הקוסמולוגי בצפיפות האנרגיה $\rho$ כלומר לכלול בה תרומה $\rho_{vac} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$.

משוואת פרידמן השנייה

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

את המשוואה השנייה ניתן להחליף בחוק הראשון של התרמודינמיקה במרחב עקום

$$\frac{d}{dt}[\rho(t)a^3(t)] = -\frac{p(t)}{c^2}\frac{d}{dt}[a^3(t)]$$

## אינטגרלים שימושיים וזהויות טריגונומטריות

(אינטגרלים שנדרשים לבחינה יוספו לרשימה זו במידת הצורך בגרסא שתחולק עם הבחינה)

$$\int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \pi, \qquad \int_{u_2}^{u_1} \frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \frac{1}{2}\pi(u_1+u_2), \qquad u_1 > u_2$$

$$\int_0^{a+\sqrt{a^2+1}} \frac{1+ax}{\sqrt{1+2ax-x^2}} = \frac{\pi}{2} + 2a + O\left(a^2\right), \qquad a \gg 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha), \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$