

תאריך הבחינה : 26.4.2022
שמות המרצים : ד"ר אבגני כץ, ד"ר אלעד שופן
שמות המתרגלים : שמעון חבר, מריאנה בלפרמן
שם הקורס : מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס : 203.1.1141
שנה : 2022 סמסטר : א' מועד : ג'
משך הבחינה : 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכול היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

שאלות

1. [15 נק'] פתחו את הפונקציה

$$f(x) = e^{1-e^x}$$

לטור חזקות של x עד סדר שלישי, כולל.

2. [10 נק'] בתנאים מסוימים, קצב הגידול במספר נשאי נגיף פרופורציוני למספר נשאי הנגיף באותו הרגע, $N(t)$, כלומר

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

כאשר λ הוא קבוע חיובי. ניתן להגדיר את "זמן ההכפלה" T_2 כפרק הזמן שבו מספר הנשאים גדל פי 2. מצאו את הביטוי ל- T_2 כתלות ב- λ .

3. [15 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$$

4. [15 נק'] הוכיחו על ידי שימוש בכתיב האינדקסים שעבור כל שדה וקטורי $\vec{A}(\vec{r})$ מתקיים

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = p \vec{\nabla}(\vec{A}^2)$$

כאשר p הוא מספר שעליכם למצוא.

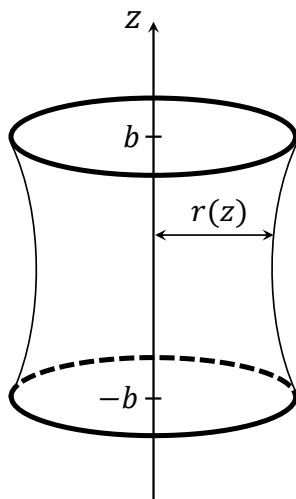
5. [20 נק'] כשתולים שרשרת בשני קצותיה, היא מקבלת צורה המתוארת על ידי העקומה הבאה, המכונה "קו שרשרת":

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

כאשר x הוא הציר האופקי שלאורכו משתרעת השרשרת, y הוא הציר הפונה כלפי מעלה, ו- a הוא מספר חיובי.

(א) אם נתון שקצות השרשרת נמצאים ב- $x = \pm b$, חשבו את אורכה במונחים של a ו- b .

(ב) נתבונן בבוועת סבון הנוצרת בין שתי טבעות:



בהזנחת כוח הכובד ביחס למתח הפנים, המרחק של פני הבוועה מציר ה- z נתון על ידי אותה הפונקציה כמו קו השרשרת:

$$r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$$

הטבעות נמצאות ב- $z = \pm b$. חשבו את שטח הפנים של הבוועה במונחים של a ו- b .

רמז: רשמו תחילה את התרומה לשטח המתקבלת מהתחום שבין z ל- $z + dz$. ניתן לקבל אותה על ידי הכפלת היקף המעגל האופקי באלמנט האורך על פני המשטח בכיוון הניצב למעגל. בחישוב האינטגרל שמתקבל לאחר מכן ניתן להיעזר בזהות

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$$

6. [25 נק'] בדקו את משפט גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F} = \left(0, 0, \sin\left(\frac{z}{a}\right) \right)$$

כאשר a הוא קבוע נתון ו- V הוא נפח של קובייה שאחת מפאותיה מתוארת על ידי

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

והקובייה כולה נמצאת ב- $z \geq 0$. עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) [5 נק'] חשבו את $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

(ב) [10 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

(ג) [10 נק'] חשבו את שטף השדה היוצא מתוך הנפח:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$