אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 15.2.2022
שמות המרצים: ד"ר אבגני כץ, ד"ר אלעד שופן
שמות המתרגלים: שמעון חבר, מריאנה בלפרמן
שם הקורס: מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס: 203.1.1141
שנה: 2022 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

1. [15 נק'] טור טיילור של פונקציה מסוימת $g(x)$ סביב $x=0$ נתון על ידי

$$g(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

כאשר a, b ו־c הם מספרים נתונים. חשבו את טור טיילור סביב $x=0$ של הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$$

עד סדר שני, כולל.

פתרון:

$$f(x) = \left(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots\right)^{-1/2}$$

נשתמש בנוסחה עבור הטור של $(1+x)^p$ עם $p=-1/2$, שלפיה

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

ונקבל

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}\left(ax + bx^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{3}{8}\left(ax + \mathcal{O}(x^2)\right)^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ &= 1 - \frac{a}{2}\,x + \frac{3a^2 - 4b}{8}\,x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

2. [15 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\int \sqrt{x^2+4}\; dx$$

רמז: הזהויות הבאות עשויות להיות שימושיות:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\\ \cosh 2x &= 2\cosh^2 x - 1\\ \sinh 2x &= 2\sinh x \cosh x\end{aligned}$$

פתרון:

נרשום את האינטגרל כ־

$$I = \int \sqrt{x^2+4}\; dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\; dx$$

נבצע את ההצבה

$$x = 2\sinh u\,, \qquad dx = 2\cosh u\, du$$

ונקבל

$$\begin{aligned}I &= 4\int \sqrt{\sinh^2 u + 1}\;\cosh u\, du\\ &= 4\int \cosh^2 u\, du\\ &= 2\int (\cosh 2u + 1)\, du\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sinh 2u + u\right) + C\\ &= 2\sinh u \cosh u + 2u + C\\ &= 2\sinh u\sqrt{\sinh^2 u + 1} + 2u + C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

3. [15 נק'] נתון כי

$$\frac{dg}{df} = \frac{|g|}{g^2 \sin(2g)}$$

ושעבור $g = -\pi/4$ מתקיים $f = 1/4$. חשבו את ערכו של f עבור $g = \pi/2$.

פתרון:

נשים לב שניתן לרשום את קצב השינוי של f כפונקציה של g באופן הבא

$$\frac{df}{dg} = \frac{g^2 \sin(2g)}{|g|} = g \sin(2g) \times \begin{cases} 1 & g \geq 0 \\ -1 & g < 0 \end{cases}$$

ולעשות אינטגרציה כדי למצוא את השינוי ב־f בין שני ערכי g הנתונים:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{df}{dg}\, dg \\ &= \frac{1}{4} - \int_{-\pi/4}^{0} g \sin(2g)\, dg + \int_{0}^{\pi/2} g \sin(2g)\, dg \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} g \cos(2g)\Big|_{-\pi/4}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \cos(2g)\, dg - \frac{1}{2} g \cos(2g)\Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} \cos(2g)\, dg \\ &= \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4}\sin(2g)\Big|_{-\pi/4}^{0} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}(-1) + \frac{1}{4}\sin(2g)\Big|_{0}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}(-1) + \frac{\pi}{4} + 0 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(ניתן היה גם לשים לב שמדובר בפונקציה אי־זוגית ולהסתפק באינטגרל בין $\pi/4$ ל־$\pi/2$.)

4. [15 נק'] מצאו את שטחו של המשטח המוגדר על ידי

$$y = \sqrt{1-z^2}\,, \quad -1 \le x \le 1\,, \quad -1 \le z \le 1$$

פתרון:

ניתן לשים לב שמדובר בחצי מעטפת של גליל שצירו על ציר ה־x, רדיוסו $R = 1$ וגובהו $h = 2$. כדי לחשב את השטח, נכפיל את אורך הקשת πR בגובה h ונקבל

$$S = \pi R h = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$$

לחלופין, ניתן לתאר את המשטח על ידי הפונקציה

$$y = f(x,z) = \sqrt{1-z^2}$$

להטילו על מישור xz ולחשב את השטח באמצעות האינטגרל

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \\ &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dz \sqrt{1 + 0 + \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2} \\ &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dz \, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= 2 \arcsin z \Big|_{-1}^{1} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

5. [25 נק'] בדקו את משפט גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$$

עבור הנפח V הכלוא בין הפרבולואיד

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

לבין מישור xy.

עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) [5 נק'] חשבו את $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

פתרון:

$$\vec{F} = (x, y, z)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(ב) [10 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

פתרון:

חיתוך הפרבולואיד עם מישור xy (כלומר $z=0$) הוא

$$x^2 + y^2 = 1$$

זהו מעגל עם רדיוס 1 שמרכזו בראשית. נחשב את האינטגרל בקואורדינטות גליליות:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV &= 3\iiint_V dV \\
&= 3\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr\, r \int_0^{1-r^2} dz \\
&= 6\pi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\, dr \\
&= 6\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

(ג) [10 נק'] חשבו את שטף השדה היוצא מתוך הנפח:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

פתרון:

עבור העיגול המהווה את תחתית הנפח ב־$z=0$:

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (x,y,0)\cdot(0,0,-1) = 0$$

נשאר אם כן לחשב את השטף דרך הפרבולואיד שמתואר ע"י הפונקציה

$$z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

נעשה את החישוב באמצעות הטלה על מישור xy, כך שתחום האינטגרציה D הוא עיגול ברדיוס 1 שמרכזו בראשית:

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS &= \iint_D \vec{F}(x,y,f(x,y))\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(x,y,1-x^2-y^2\right)\cdot(2x,2y,1)\,dxdy \\
&= \iint_D \left(1+x^2+y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr\, r\left(1+r^2\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

6. [15 נק'] הוכיחו על ידי שימוש בכתיב האינדקסים שעבור כל שני שדות וקטוריים $\vec{A}(\vec{r})$ ו־$\vec{B}(\vec{r})$ מתקיים

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{B}+\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}+\vec{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)+\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$

פתרון:

נתחיל מהאיבר הראשון באגף ימין:

$$\begin{aligned}
[(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}]_i &= \epsilon_{ijk}(\vec{A}\times\vec{\nabla})_j B_k \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{j\ell m}A_\ell\partial_m B_k \\
&= \epsilon_{jki}\epsilon_{j\ell m}A_\ell\partial_m B_k \\
&= \left(\delta_{k\ell}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{i\ell}\right)A_\ell\partial_m B_k \\
&= A_k\partial_i B_k - A_i\partial_k B_k \\
&= A_k\partial_i B_k - [\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})]_i
\end{aligned}$$

באופן דומה האיבר השני ייתן

$$[(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}]_i = B_k\partial_i A_k - [\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})]_i$$

סכימת כל האיברים באגף ימין נותנת

$$\begin{aligned}
[(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})]_i &= A_k\partial_i B_k + B_k\partial_i A_k \\
&= \partial_i(A_k B_k) \\
&= [\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})]_i
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו את אגף שמאל.