אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה : 26.4.2022
שמות המרצים : ד״ר אבגני כץ, ד״ר אלעד שופן
שמות המתרגלים : שמעון חבר, מריאנה בלפרמן
שם הקורס : מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס : 203.1.1141
שנה : 2022 סמסטר : א׳ מועד : ג׳
משך הבחינה : 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

שאלות

1. [15 נק׳] פתחו את הפונקציה

$$f(x) = e^{1-e^x}$$

לטור חזקות של x עד סדר שלישי, כולל.

פתרון:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1-e^x} \\ &= e^{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^4)} \\ &= 1+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(-x+\mathcal{O}(x^2)\right)^3+\mathcal{O}(x^4) \\ &= 1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x^2+x^3\right)-\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4) \\ &= 1-x+\frac{x^3}{6}+\dots \end{aligned}$$

2. [10 נק'] בתנאים מסוימים, קצב הגידול במספר נשאי נגיף פרופורציוני למספר נשאי הנגיף באותו הרגע, $N(t)$, כלומר

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

כאשר λ הוא קבוע חיובי. ניתן להגדיר את "זמן ההכפלה" T_2 כפרק הזמן שבו מספר הנשאים גדל פי 2. מצאו את הביטוי ל־T_2 כתלות ב־λ.

פתרון:

נעשה הפרדת משתנים:

$$\frac{dN}{N} = \lambda\, dt$$

אחרי אינטגרציה נקבל

$$\ln N = \lambda t + c$$

ומכאן

$$N(t) = Ce^{\lambda t}$$

מהדרישה

$$\frac{N(t+T_2)}{N(t)} = 2$$

נקבל

$$\frac{Ce^{\lambda(t+T_2)}}{Ce^{\lambda t}} = 2$$

ונחלץ

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

3. [15 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

פתרון:

נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx &= 2x^2\sqrt{x-1}\Big|_1^2 - 4\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx \\ &= 8 - 4\left[\frac{2}{3}x\left(x-1\right)^{3/2}\Big|_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 \left(x-1\right)^{3/2}dx\right] \\ &= 8 - \frac{8}{3}\left[2 - \frac{2}{5}\left(x-1\right)^{5/2}\Big|_1^2\right] \\ &= \frac{56}{15}\end{aligned}$$

4. [15 נק'] הוכיחו על ידי שימוש בכתיב האינדקסים שעבור כל שדה וקטורי $\vec{A}(\vec{r})$ מתקיים

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=p\,\vec{\nabla}(\vec{A}^2)$$

כאשר p הוא מספר שעליכם למצוא.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_i &= \epsilon_{ijk}A_j(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m}A_j\partial_\ell A_m \\
&= \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)A_j\partial_\ell A_m \\
&= A_j\partial_i A_j - A_j\partial_j A_i \\
\left[(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]_i &= \left(A_j\partial_j\right)A_i \\
\left[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]_i &= A_j\partial_i A_j = \frac{1}{2}\partial_i\left(A_jA_j\right)=\frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}(\vec{A}^2)\right]_i
\end{aligned}$$

לכן השוויון מתקיים עם

$$p=\frac{1}{2}$$

5. [20 נק'] כשתולים שרשרת בשני קצותיה, היא מקבלת צורה המתוארת על ידי העקומה הבאה, המכונה "קו שרשרת":

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

כאשר x הוא הציר האופקי שלאורכו משתרעת השרשרת, y הוא הציר הפונה כלפי מעלה, ו־a הוא מספר חיובי.

(א) אם נתון שקצות השרשרת נמצאים ב־$x = \pm b$, חשבו את אורכה במונחים של a ו־b.

פתרון:

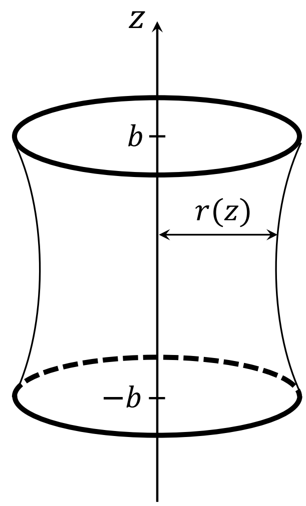
אלמנט אורך על העקומה נתון על ידי

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,dx = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

כך שהאורך הוא

$$\ell = \int ds = \int_{-b}^{b} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-b}^{b} = 2a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

(ב) נתבונן בבועת סבון הנוצרת בין שתי טבעות:



בהזנחת כוח הכובד ביחס למתח הפנים, המרחק של פני הבועה מציר ה־z נתון על ידי אותה הפונקציה כמו קו השרשרת:

$$r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$$

הטבעות נמצאות ב־$z = \pm b$. חשבו את שטח הפנים של הבועה במונחים של a ו־b.

רמז: רשמו תחילה את התרומה לשטח המתקבלת מהתחום שבין z ל־$z + dz$. ניתן לקבל אותה על ידי הכפלת היקף המעגל האופקי באלמנט האורך על פני המשטח בכיוון הניצב למעגל. בחישוב האינטגרל שמתקבל לאחר מכן ניתן להיעזר בזהות

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cosh 2x\right)$$

פתרון:

בדומה לסעיף הקודם, אלמנט האורך של קו השרשרת הוא

$$ds = \cosh\left(\frac{z}{a}\right) dz$$

כדי לקבל את השטח, בכל z נכפיל אותו בהיקף $2\pi r(z)$ ונעשה אינטגרציה:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-b}^{b} 2\pi r(z) \cosh\left(\frac{z}{a}\right) dz \\ &= 2\pi a \int_{-b}^{b} \cosh^2\left(\frac{z}{a}\right) dz \\ &= \pi a \int_{-b}^{b} \left(1 + \cosh\left(\frac{2z}{a}\right)\right) dz \\ &= \pi a \left(z + \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{2z}{a}\right)\right)\Bigg|_{-b}^{b} \\ &= \pi a \left(2b + a \sinh\left(\frac{2b}{a}\right)\right) \end{aligned}$$

6. [25 נק'] בדקו את משפט גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F} = \left(0,\,0,\,\sin\left(\frac{z}{a}\right)\right)$$

כאשר a הוא קבוע נתון ו־V הוא נפח של קובייה שאחת מפאותיה מתוארת על ידי

$$-1 \le x \le 1\,,\quad -1 \le y \le 1\,,\quad z = 0$$

והקובייה כולה נמצאת ב־$z \ge 0$. עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) [5 נק'] חשבו את $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$.

פתרון:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = \frac{1}{a}\cos\left(\frac{z}{a}\right)$$

(ב) [10 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

פתרון:

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\int_0^2 dz\,\frac{1}{a}\cos\left(\frac{z}{a}\right) = 4\sin\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_0^2 = 4\sin\left(\frac{2}{a}\right)$$

(ג) [10 נק'] חשבו את שטף השדה היוצא מתוך הנפח:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

פתרון:

אין שטף דרך הבסיס ב־$z=0$ כי עליו $\vec{F}=0$. עבור הבסיס ב־$z=2$:

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = \sin\left(\frac{2}{a}\right)\hat{z}\cdot\hat{z} = \sin\left(\frac{2}{a}\right)$$

$$\iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\,\sin\left(\frac{2}{a}\right) = 4\sin\left(\frac{2}{a}\right)$$

אין שטף דרך ארבע הפאות האנכיות כי השדה מקביל אליהן. אז קיבלנו

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = 4\sin\left(\frac{2}{a}\right)$$