תרמו 1

$203 - 1 - 2161$

מרצה: מיכאל גדלין

מתרגל: ברק אזולאי

מועד ב׳ 26/02/2020

משך המבחן 4 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות מצורף, מחשבון אסור

נא לכתוב במסודר בלבד על דף הבחינה, לאחר פתרון מלא בדפי הטיוטא, שאינם נבדקים.

מה צריך להיות בדף הבחינה: א) כל ההסברים הפיזיקליים ההכרחיים, ב) כל הביטויים העיקריים, ג) הסבר קצר לפעולות הנדרשות, ד) כל הפעולות המתמטיות החשובות להבנה פיזיקלית של הנעשה, ה) תשובה סופית.

מה לא צריך להיות בדף הבחינה : א) פיתוחים תאורטיים (למעט שאלה תאורטית ושאלה בנושא הקריאה), ב) פעולות מתמטיות טכניות (העברת אגפים, פתרון משוואות, חישוב אינטרגלים וכו׳), ג) סיפורים שלא קשורים לשאלה, ד) נוסחאות שלא קשורות לשאלה.

בשאלה תאורטית אין לדלג על שלבים פיזיקליים (הנחות, קירובים, שיטות). בשאלה על נושא הקריאה יש לפתח מהתחלה ולא להשתמש בנוסחה מוכנה.

ניקוד: שאלות 1, 3, 4, 5 – 20 נק׳ כל אחת, שאלה 2 – 10 נק׳.

בהצלחה !

1) תיאוריה:
השתמשו במכלול גרנד–קנוני כדי לפתח ביטוי מספרי תפוסה (אכלוס) לגזים קוונטיים ומצאו פלוקטואציות של אכלוס לפרמיונים.

---

2) הראו שבתהליך השינוק (Throttling) לא ניתן לקרר גז אידאלי (יש לפתח מהתחלה) ?

---

3) לחומר מסוים במצב מוצק אנרגיה חופשית למול אחד $f_s = B/Tv_s^3$ ובמצב נוזלי $f_l = A/Tv_l^2$ כאשר A ו B קבועים, v הוא נפח מולרי ו T טמפרטורה. מצאו $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{coex}$. יש לבטא את הכל באמצעות T ו- P אבל אין צורך להציב בביטוי סופי אם הוא יוצא ארוך.

---

4)
אפשר לחשוב על מולקולה אלסטית ארוכה כאל שרשרת של N חוליות. לכל חוליה יכול להיות אורך $l = a$ או $l = b$ ואנרגיה שתלויה ב l:

$$\varepsilon_n(a) = (n + 1/2)\hbar\omega_a$$
$$\varepsilon_n(b) = (n + 1/2)\hbar\omega_b$$
$$n = 0, 1, \dots \infty$$

אם השרשרות נמצאת שיווי משקל תרמי עם מאגר חום בטמפרטורה T ובו–זמנית מוחזקת במתיחות f מהם האורך והאנרגיה הממוצעים של השרשרת ?

---

5) מערכת נמצאת בשיווי משקל תרמי בטמפרטורה T כאשר מספר החלקיקים מוגבל: $N = 0, 1, 2$.
לכל חלקיק יש שלוש אנרגיות אפשריות: $0, \varepsilon, 2\varepsilon,$ מצאו את פונקציית החלוקה הגרנד–קנונית לכל שלוש סטטיסטיקות של גזים אידאליים – חלקיקים לא ניתנים להבחנה (קלסיים, פרמינונים, בוזונים).

1. For the grand-canonical ensemble the probability of finding a system in a microstate with energy E_a and number of particles N_a is

$$p_a = \frac{e^{-\beta(E_a-\mu N_a)}}{\mathbb{Z}} \tag{1}$$

$$\mathbb{Z} = \sum_a e^{-\beta(E_a-\mu N_a)} \tag{2}$$

For non-interacting particles with single-particle states i one has

$$N_a = \sum_i n_i, \quad E_a = \sum_i n_i \varepsilon_i \tag{3}$$

where n_i is the number of particles in the single-particle state i and ε_i is the particle energy in the state i. Then

$$\mathbb{Z} = \sum_{\{n_i\}} \Gamma(\{n_i\}) \prod_i e^{-\beta n_i \varepsilon_i + \beta\mu n_i} \tag{4}$$

where $\Gamma(\{n_i\})$ is the multiplicity of the distribution $\{n_i\}$. Quantum particles are indistinguishable so that $\Gamma(\{n_i\}) = 1$ and

$$\mathbb{Z} = \prod_i \mathbb{Z}_i \tag{5}$$

$$\mathbb{Z}_i = \sum_{\{n_i\}} \prod_i e^{-\beta n_i \varepsilon_i + \beta\mu n_i} = \prod_i \left[\sum_{n_i} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)}\right] = \prod_i \sum_{n_i} c_i^{n_i} \tag{6}$$

where the summation is on all possible n_i and

$$c_i = e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)} \tag{7}$$

The total number of particles is

$$\langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathbb{Z}\right)_\beta = \sum_i \langle n_i\rangle \tag{8}$$

$$\langle n_i\rangle = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathbb{Z}_i\right)_\beta = \sum_{n_i} n_i p(n_i) \tag{9}$$

where

$$p(n_i) = \frac{c_i^{n_i}}{\mathbb{Z}_i} \tag{10}$$

For fermions $n_i = 0, 1$ which gives

$$\mathbb{Z}_i = 1 + c_i \tag{11}$$

$$\langle n_i\rangle = \frac{c_i}{1+c_i} \tag{12}$$

It is instructive to write

$$p_i(1) = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}} = \langle n_i \rangle \tag{13}$$

$$p_i(0) = 1 - \langle n_i \rangle \tag{14}$$

Now

$$\langle (\delta n_i)^2 \rangle = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2 = p(1) - \langle n_i \rangle^2 = \langle n_i \rangle (1 - \langle n_i \rangle) = \frac{c_i}{(1 + c_i)^2} \tag{15}$$

For bosons $n_i = 1, \ldots, \infty$ and

$$\mathbb{Z}_i = \frac{1}{1 - c_i} \tag{16}$$

provided $\varepsilon_i > \mu$.

2. During throttling $Q = 0$ and $dU = -PdV$ with $P =$ const, so that $dU = -d(PV)$ and $dH = 0$. Thus, we are interested in $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$

$$dH = TdS + VdP = 0 \tag{17}$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right]dP = 0 \tag{18}$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = C_P \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right] \tag{20}$$

$$dG = -SdT + VdP \rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -V\alpha_P \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_P}(\alpha_P T - 1) \tag{22}$$

For $PV = NT$ one has

$$\alpha_P T = 1 \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = 0 \tag{24}$$

In a more simple way, for an ideal gas $U = Nc_V T$ and $PV = NT$, so that $H = Nc_P T$, where c_V and c_P are constant. If $H =$ const and $N =$ const then $T =$ const.

3.

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{coex} = \frac{s_s - s_l}{v_s - v_l} \tag{25}$$

$$s_s = -\left(\frac{\partial f_s}{\partial T}\right)_v = \frac{B}{T^2 v_s^3} \tag{26}$$

$$s_l = -\left(\frac{\partial f_l}{\partial T}\right)_v = \frac{A}{T^2 v_l^2} \tag{27}$$

$$P = -\left(\frac{\partial f_s}{\partial v}\right)_T = \frac{3B}{T v_s^4} \tag{28}$$

$$P = -\left(\frac{\partial f_l}{\partial v}\right)_T = \frac{2A}{T v_l^3} \tag{29}$$

$$v_s = \left(\frac{3B}{PT}\right)^{1/4} \tag{30}$$

$$v_l = \left(\frac{2A}{PT}\right)^{1/3} \tag{31}$$

$$s_s = \frac{B}{T^2}\left(\frac{3B}{PT}\right)^{-3/4} \tag{32}$$

$$s_l = \frac{A}{T^2}\left(\frac{2A}{PT}\right)^{-2/3} \tag{33}$$

4.

Since the number of links is constant but the total length is not, the useful ensemble is the isobaric one:

$$\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta E_i + \beta f L_i} \tag{34}$$

Summation in the right hand side is over all possible states. In this summation the links are independent, so that

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1^N \tag{35}$$

$$\mathcal{Z}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=a,b} e^{\beta f l} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega_l} = \sum_{l=a,b} \frac{e^{\beta f l - \beta\hbar\omega_l/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_l}} \tag{36}$$

where the summation is on all possible states of a single link, that is, on both $l = a, b$ and on all possible energies $\hbar(n + 1/2)\omega_l$ for each link.

Let us denote $\psi = \beta f$, then

$$\langle E \rangle = -N \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_1}{\partial \beta} \right)_\psi = -\frac{N}{\mathcal{Z}_1} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial \beta} \right)_\psi \tag{37}$$

$$\langle L \rangle = N \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_1}{\partial \psi} \right)_\beta = \frac{N}{\mathcal{Z}_1} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial \psi} \right)_\beta \tag{38}$$

$$\mathcal{Z}_1 = \sum_{l=a,b} \frac{e^{\psi l - \beta\hbar\omega_l/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_l}} = \frac{e^{\psi a - \beta\hbar\omega_a/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_a}} + \frac{e^{\psi b - \beta\hbar\omega_b/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_b}} \tag{39}$$

$$= \frac{e^{\psi a}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_a/2)} + \frac{e^{\psi b}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_b/2)} \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial \beta} \right)_\psi = -\frac{\hbar\omega_a e^{\psi a} \cosh(\beta\hbar\omega_a/2)}{4\sinh^2(\beta\hbar\omega_a/2)} - \frac{\hbar\omega_b e^{\psi b} \cosh(\beta\hbar\omega_b/2)}{4\sinh^2(\beta\hbar\omega_b/2)} \tag{41}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial \psi} \right)_\beta = \frac{a e^{\psi a}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_a/2)} + \frac{b e^{\psi b}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_b/2)} \tag{42}$$

5. The grand canonical partition function is

$$\mathbb{Z} = \sum_{N_a} \sum_{E_a} \xi^{N_a} e^{-\beta E_a} \tag{43}$$

$$N_a = n_0 + n_1 + n_2 \tag{44}$$

$$E_a = \varepsilon(n_1 + 2n_2) \tag{45}$$

According to the conditions, possible values of $N_a = 0, 1, 2$ only. Let us denote

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0 + \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 \tag{46}$$

For $N = 0$ there is only one state $n_0 = n_1 = n_2 = 0$, $E_a = 0$ and $Z_0 = 1$ for all statistics.
For $N = 1$ there are three possible microstates for each statistics:

$$n_0 = 1, n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad E_a = 0 \tag{47}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 1, \quad n_2 = 0, \quad E_a = \varepsilon \tag{48}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad E_a = 2\varepsilon \tag{49}$$

so that

$$\mathbb{Z}_1 = \xi\big(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}\big) \tag{50}$$

If $N = 2$ the statistics are different. For FD each level can accept no more than one particle, so that there are three states

$$n_0 = 1, n_1 = 1, \quad n_2 = 0, \quad E_a = 0 \tag{51}$$

$$n_0 = 1, n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad E_a = 2\varepsilon \tag{52}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 1, \quad n_2 = 1, \quad E_a = 3\varepsilon \tag{53}$$

and

$$\mathbb{Z}_{2,FD} = \xi^2\big(e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}\big) \tag{54}$$

For BE there are all options of FD and also three options when both particles are at the same level:

$$n_0 = 1, n_1 = 1, \quad n_2 = 0, \quad E_a = 0 \tag{55}$$

$$n_0 = 1, n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad E_a = 2\varepsilon \tag{56}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 1, \quad n_2 = 1, \quad E_a = 3\varepsilon \tag{57}$$

$$n_0 = 2, n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad E_a = 0 \tag{58}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 2, \quad n_2 = 0, \quad E_a = 2\varepsilon \tag{59}$$

$$n_0 = 0, n_1 = 0, \quad n_2 = 2, \quad E_a = 4\varepsilon \tag{60}$$

so that

$$\mathbb{Z}_{2,BE} = +\mathbb{Z}_{2,add} \tag{61}$$

$$\mathbb{Z}_{2,add} = \xi^2\big(1 + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}\big) \tag{62}$$

$$\mathbb{Z}_{2,BE} = \xi^2\big(1 + e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}\big) \tag{63}$$

For classical particles (corrected MB) all options of BE are possible, but the weights are

$$\Gamma(n_0, n_1, n_2) = \frac{1}{n_0! n_1! n_2!} \tag{64}$$

thefefore

$$\mathbb{Z}_{2,MB} = \mathbb{Z}_{2,FD} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{2,add} \tag{65}$$

$$\mathbb{Z}_{2,MB} = \xi^2\left(\frac{1}{2} + e^{-\beta\varepsilon} + \frac{3}{2}e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + \frac{1}{2}e^{-4\beta\varepsilon}\right) \tag{66}$$

Another way is to write

$$\mathbb{Z}_{2,MB} = \frac{1}{2!}\mathbb{Z}_1^2 = \frac{\xi^2}{2}\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}\right)^2 \tag{67}$$

which gives the same result.