תרמו 1

$203-1-2161$

מרצה: מיכאל גדלין

מתרגל: ברק אזולאי

מועד ג׳

משך המבחן 4 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות מצורף, מחשבון אסור

נא לכתוב במסודר בלבד על דף הבחינה, לאחר פתרון מלא בדפי הטיוטא, שאינם נבדקים.

מה צריך להיות בדף הבחינה: א) כל ההסברים הפיזיקליים ההכרחיים, ב) כל הביטויים העיקריים, ג) הסבר קצר לפעולות הנדרשות, ד) כל הפעולות המתמטיות החשובות להבנה פיזיקלית של הנעשה, ה) תשובה סופית.

מה לא צריך להיות בדף הבחינה : א) פיתוחים תאורטיים (למעט שאלה תאורטית ושאלה בנושא הקריאה), ב) פעולות מתמטיות טכניות (העברת אגפים, פתרון משוואות, חישוב אינטרגלים וכו׳), ג) סיפורים שלא קשורים לשאלה, ד) נוסחאות שלא קשורות לשאלה.

בשאלה תאורטית אין לדלג על שלבים פיזיקליים (הנחות, קירובים, שיטות). בשאלה על נושא הקריאה יש לפתח מהתחלה ולא להשתמש בנוסחה מוכנה.

ניקוד: שאלות 1, 3, 4, 5 – 20 נק׳ כל אחת, שאלה 2 – 10 נק׳.

בהצלחה !

1) תיאוריה:
פיתחו פונקציית חלוקה גרנד-קנונית לגז אידאלי וקבלו ממנה פוטנציאל כימי והסתברות $p(N)$ של הימצאות המערכת במצב עם מספר חלקיקים N.

---

2) משוואת המצב של גז מסתורי היא $PV = NT^{1+x}$, כאשר $x > 0$. האם בתהליך השינוק גז זה מתקרר או מתחמם (יש לפתח מהתחלה) ?

---

3) תערובת של גז A ותוספת קטנה של גז B עם ריכוזים יחסיים $x_A, x_B, x_A + x_B = 1, x_B \ll 1$ נמצאת בשיווי משקל עם נוזל שמורכב מאותו חומר A עם תוספת קטנה של חומר אחר $C, x_C \ll 1$. ללא תוספות גז A נמצא בשיווי משקל אם הפאזה הנוזלית שלו בטמפרטורת הרתיחה $T(P)$ בלחץ נתון P. מצאו את טמפרטורת הרתיחה $T'(P)$ באותו לחץ של המערכת עם התוספות.

---

4) למשטח מוצק N אתרי ספיחה, כל אחד יכול לספח לא יותר ממולקולת גז אחת. במצב זה למולקולה אנרגיה $\varepsilon, \varepsilon < 0$. המשטח נמצא בשיווי משקל תרמי עם הגז מסביב בטמפרטורה T ולחץ P. מהו מספר המולקולות המסופחות הממוצע ומהן הפלוקטואציות.

---

5) מצאו את הדחיסות האיזותרמית

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$$

של גז פרמיונים מנוון ב- $T = 0$.

1. For grand-canonical ensemble of independent particles

$$\mathbb{Z} = \sum_a e^{-\beta E_a} \xi^{N_a} \tag{1}$$

where $\xi = e^{\beta\mu}$ and the sum is over all possible microstates. If $i = 1, \dots, M$ are the possible physical states then

$$N_a = \sum_i n_i, \quad E_a = \sum_i n_i \varepsilon_i \tag{2}$$

where n_i is the number of particles in the state i and ε_i is the energy of the state i. The set $\{n_i\}$ determines a partition, not a microstate of the system, so that

$$\mathbb{Z} = \sum_{N_a} \sum_{\{n_i\}} \Gamma(N_a, \{n_i\}) e^{-\beta \sum_i n_i \varepsilon_i} \xi^{\sum_i n_i} \tag{3}$$

Here the sum is now first over all possible partitions of the particle number N_a, with the multiplicity $\Gamma(N_a, \{n_i\})$ of the partition, and afterwards over all possible N_a. For classical indistinguishable particles (corrected Boltzmann-Maxwell statistics)

$$\Gamma(N_a, \{n_i\}) = \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \tag{4}$$

$$\mathbb{Z} = \sum_{N_a=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} \frac{1}{n_1! \dots n_m!} e^{-\beta \sum_i n_i \varepsilon_i} \xi^{\sum_i n_i} \tag{5}$$

$$= \sum_{N_a=0}^{\infty} \frac{\xi^{N_a}}{N_a!} \sum_{\{\sum_i n_i = N_a\}} \frac{N_a!}{n_1! \dots n_m!} e^{-\beta \sum_i n_i \varepsilon_i} \tag{6}$$

$$= \sum_{N_a=0}^{\infty} \frac{\xi^{N_a}}{N_a!} (\sum_i e^{-\beta \varepsilon_i})^{N_a} \tag{7}$$

$$= \sum_{N_a=0}^{\infty} \frac{\xi^{N_a}}{N_a!} Z_1^{N_a} = \exp(\xi Z_1) \tag{8}$$

wher

$$Z_1 = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} \tag{9}$$

is the single-particle canonical function. For the ideal gas we have derived

$$Z_1(N) = \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) \tag{10}$$

$$\mathbb{Z}(\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} e^{\beta\mu N} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N = \exp\left(e^{\beta\mu} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) \right) = e^{\xi Z_1} \tag{11}$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \mathbb{Z}(\mu) = -\frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) \tag{12}$$

The mean number of particles is

$$\langle N \rangle = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{\beta,V} = e^{\beta\mu}\left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right) = \xi Z_1 \tag{13}$$

$$\mathbb{Z} = e^{\langle N \rangle} \tag{14}$$

so that

$$\mu = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\langle N \rangle \lambda_T^3}{V} \tag{15}$$

The probability of having N particles is

$$p(N) = \frac{\xi^N Z_1^N}{N!\mathbb{Z}} = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle} \tag{16}$$

2. During throttling $Q = 0$ and $dU = -PdV$ with $P =$ const, so that $dU = -d(PV)$ and $dH = 0$. Thus, we are interested in $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$

$$dH = TdS + VdP = 0 \tag{17}$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right]dP = 0 \tag{18}$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = C_P \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V\right] \tag{20}$$

$$dG = -SdT + VdP \rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -V\alpha_P \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_P}(\alpha_P T - 1) \tag{22}$$

For $PV = NT^{1+x}$ one has

$$T\alpha_P - 1 = (1 + x) - 1 = x > 0 \tag{23}$$

and the gas cools down.

3. For the gas

$$\mu_{A,g} = \mu_{A,g}^{(0)} + T \ln x_A \approx \mu_{A,g}^{(0)} - T x_B \tag{24}$$

For the liquid similarly

$$\mu_{A,l} = \mu_{A,l}^{(0)} - T x_C \tag{25}$$

Without admixtures

$$\mu_{A,g}^{(0)}(P,T) = \mu_{A,l}^{(0)}(P,T) \tag{26}$$

With the admixtures

$$\mu_{A,g}^{(0)}(P,T') - T' x_B = \mu_{A,l}^{(0)}(P,T') - T' x_C \tag{27}$$

Since $x_B, x_C \ll 1$ one can expect that $|T' - T| \ll T$ and using

$$\mu^{(0)}(P,T') - \mu^{(0)}(P,T) = \left(\frac{\partial \mu^{(0)}}{\partial T}\right)_P = -s(T' - T) \tag{28}$$

one has

$$-s_g(T' - T) - T x_B = -s_l(T' - T) - T x_C \tag{29}$$

$$T' - T = -\frac{T(x_B - x_C)}{s_g - s_l} = -\frac{T^2(x_B - x_C)}{q} \tag{30}$$

4.

$$\mathbb{Z}_{ads} = \mathbb{Z}_1^N \tag{31}$$

$$\mathbb{Z}_1 = 1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)} \tag{32}$$

$$\mu = T\ln\left(n\lambda_T^3\right) = T\ln\left(P\lambda_T^3/T\right) \tag{33}$$

$$\langle N_{ads}\rangle = \frac{NT}{\mathbb{Z}_1}\frac{\partial}{\partial\mu}\mathbb{Z}_1 = \frac{N}{1+e^{-\beta(\mu-\varepsilon)}} \tag{34}$$

$$\left\langle(\delta N_{ads})^2\right\rangle = T\frac{\partial}{\partial\mu}\langle N_{ads}\rangle = \frac{Ne^{-\beta(\mu-\varepsilon)}}{(1+e^{-\beta(\mu-\varepsilon)})^2} \tag{35}$$

5.

$$\langle n \rangle_p = \begin{cases} 1, & p < p_F \\ 0, & p > p_F \end{cases} \tag{36}$$

$$N = \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 dp \propto p_F^3 \tag{37}$$

$$U = \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 \frac{p^2}{2m} dp \propto p_F^5 \tag{38}$$

$$U \propto N^{5/3} V^{-2/3} \tag{39}$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=0,N} \propto n^{5/3}, \quad n = \frac{N}{V} \tag{40}$$

$$V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=0,N} = -n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{T=0,N} = -\frac{5}{3}\frac{P}{n} \tag{41}$$

$$\kappa_T = \frac{3n}{5P} \propto n^{-2/3} \tag{42}$$