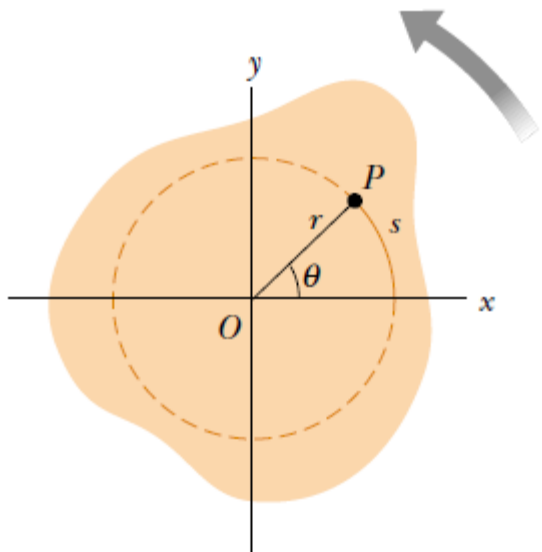


# גוף קשיח

## תנועה סיבובית של גוף קשיח

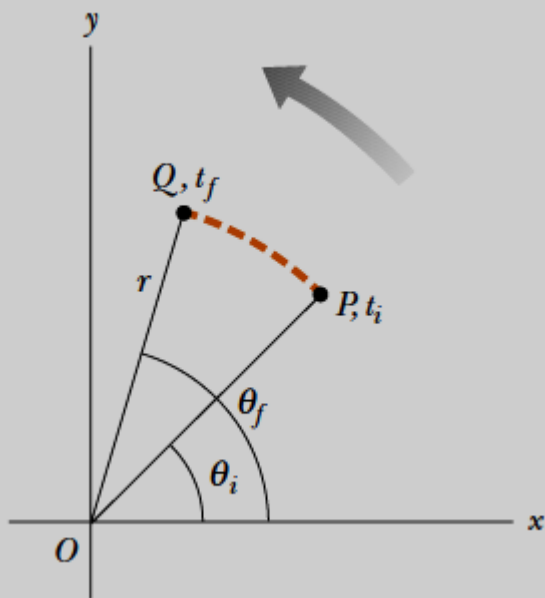


$$\theta = \frac{s}{r}$$

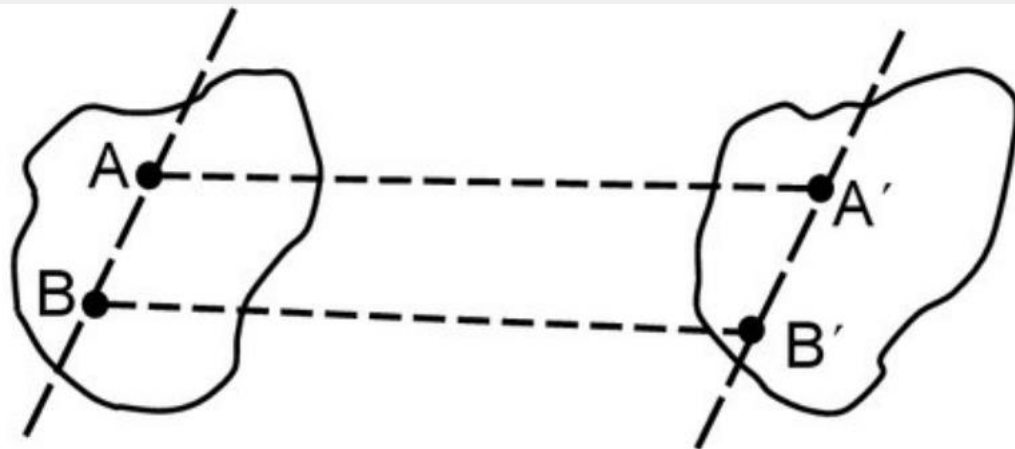
$$\theta \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180^\circ} \theta \text{ (deg)}$$

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$



# העתקה של גוף קשיח

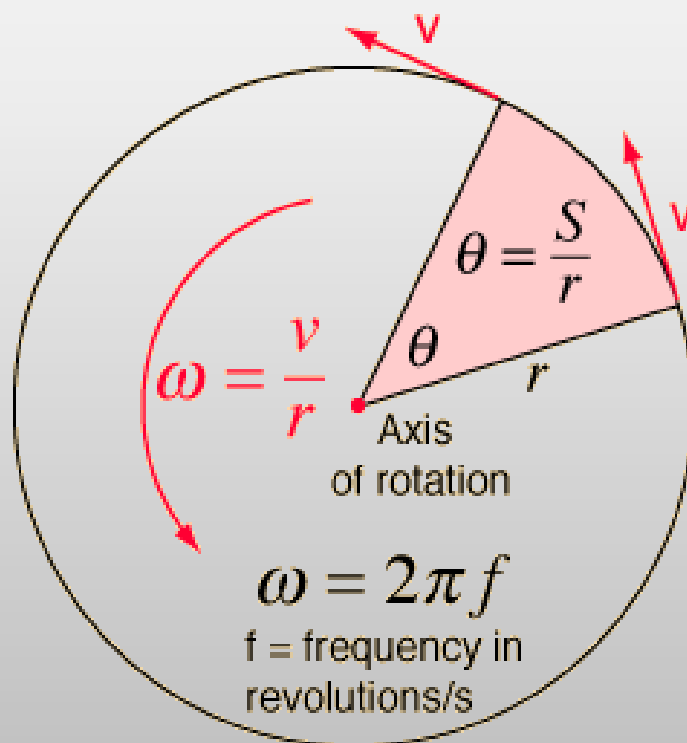


$$AB \parallel A'B'$$

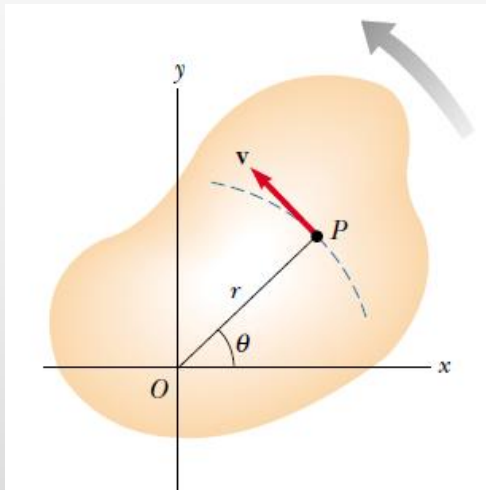
$$AA' = BB'$$

# תנועה סיבובית של גוף קשיח סביב ציר קבוע

- תנועה סיבובית: ערכים קווים וזוויתיים



# תנועה סיבובית: ערכים קווים וזוויתיים



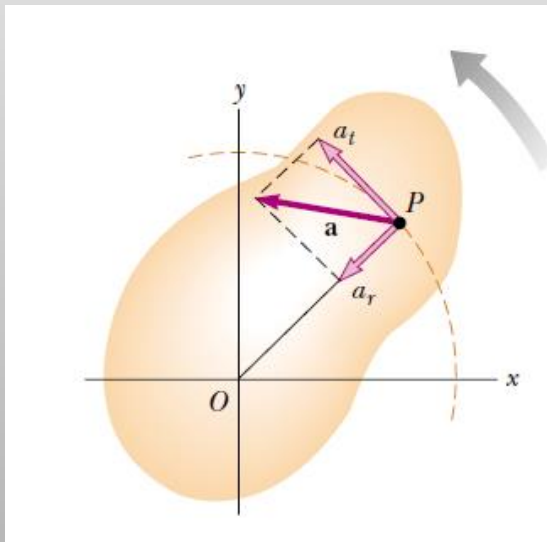
$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



$$s = r\theta$$

$$v_t = r\omega$$

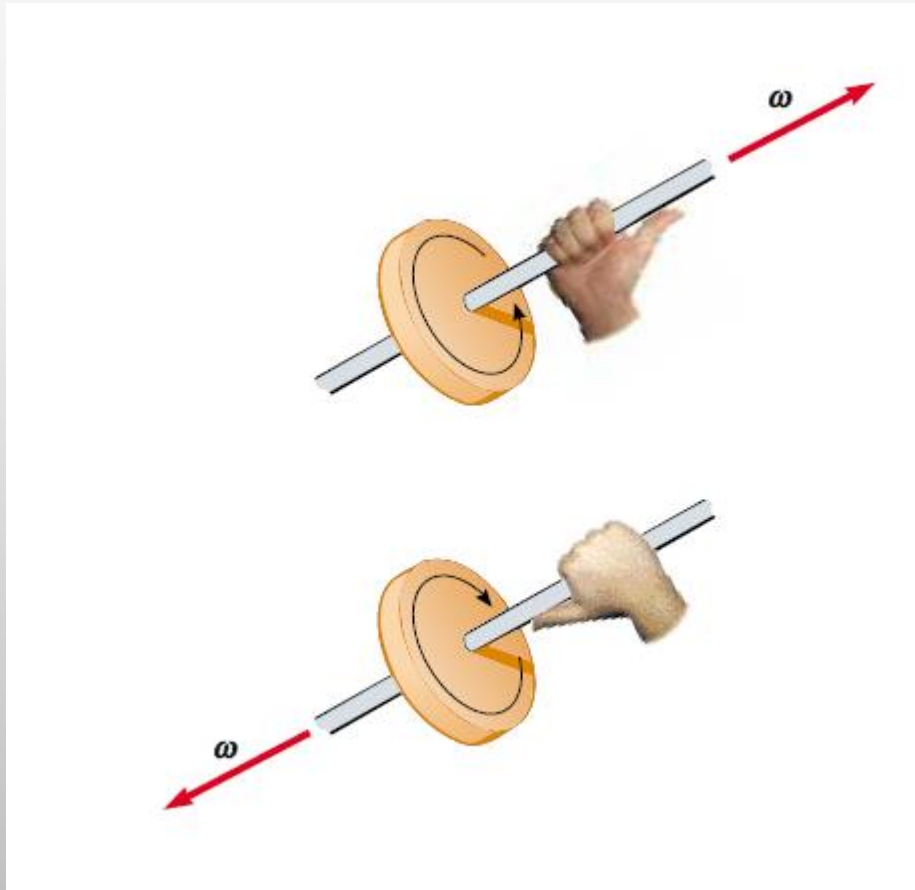
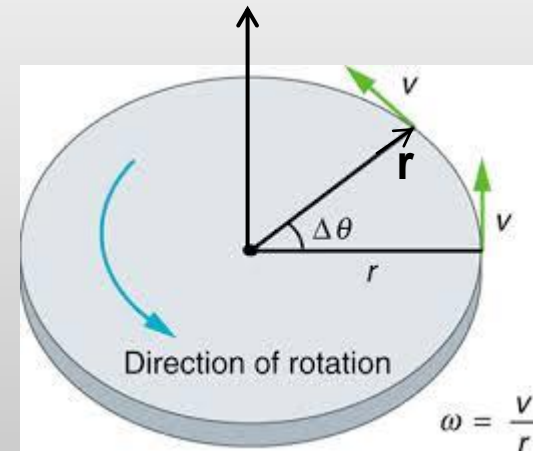
$$a_t = r\alpha$$

$$a_r = v^2/r = \omega^2 r$$

# תנועה סיבובית של גוף קשיח

• מהירות זוויתית כווקטור

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



# תנועה סיבובית של גוף קשיח

- השוואה של משוואות התנועה הקוויות והתנועה סיבובית עם תאוצה קבועה

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

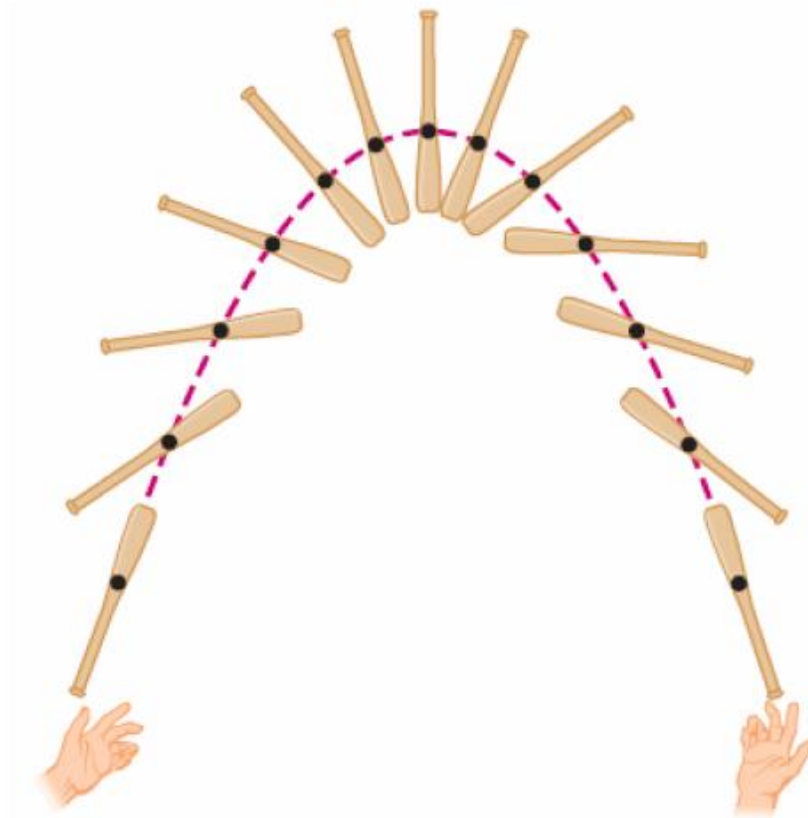
$$v_f = v_i + at$$

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

# מרכז המסה של גוף קשיח

- מרכז המסה נע במסלול בליסטי



# מרכז המסה של גוף קשיח: הגדרה

$$x_{\text{CM}} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

$$x_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int y \, dm \quad \text{and} \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

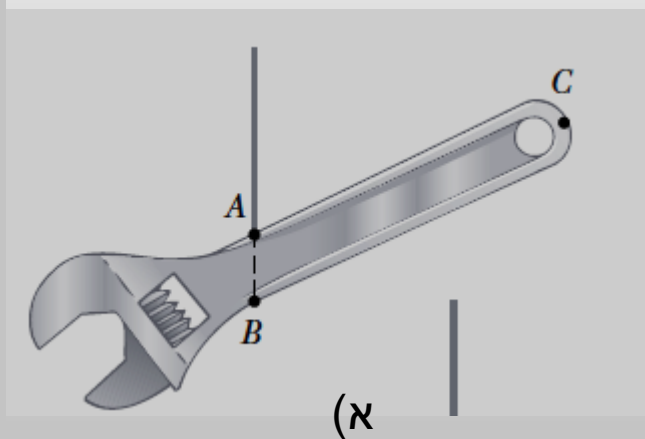
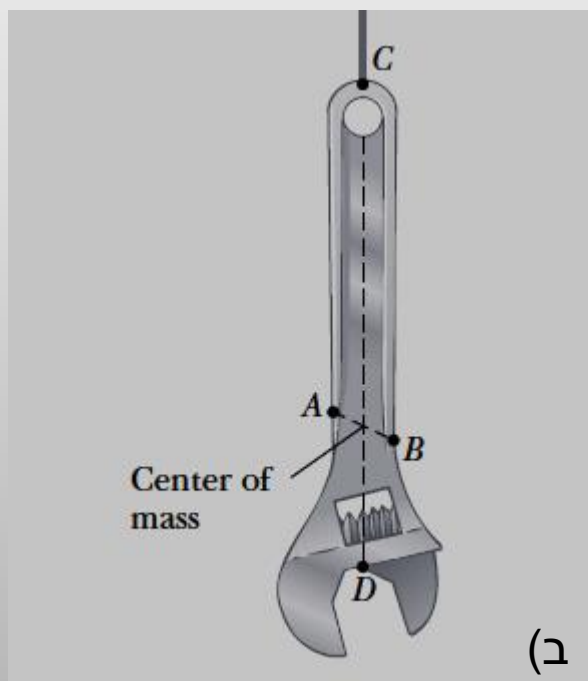
$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \, dm$$



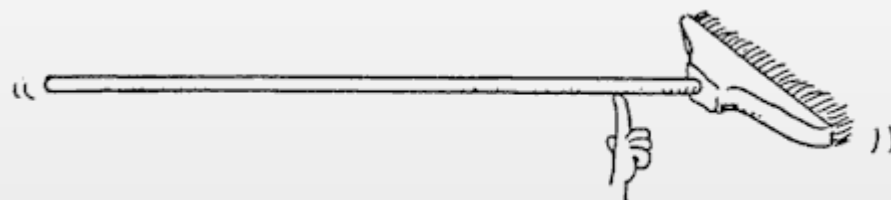
# איך למצוא מרכז המסה של הגוף?

- מרכז המסה של גוף סימטרי נמצא במרכז הסימטריה שלו.

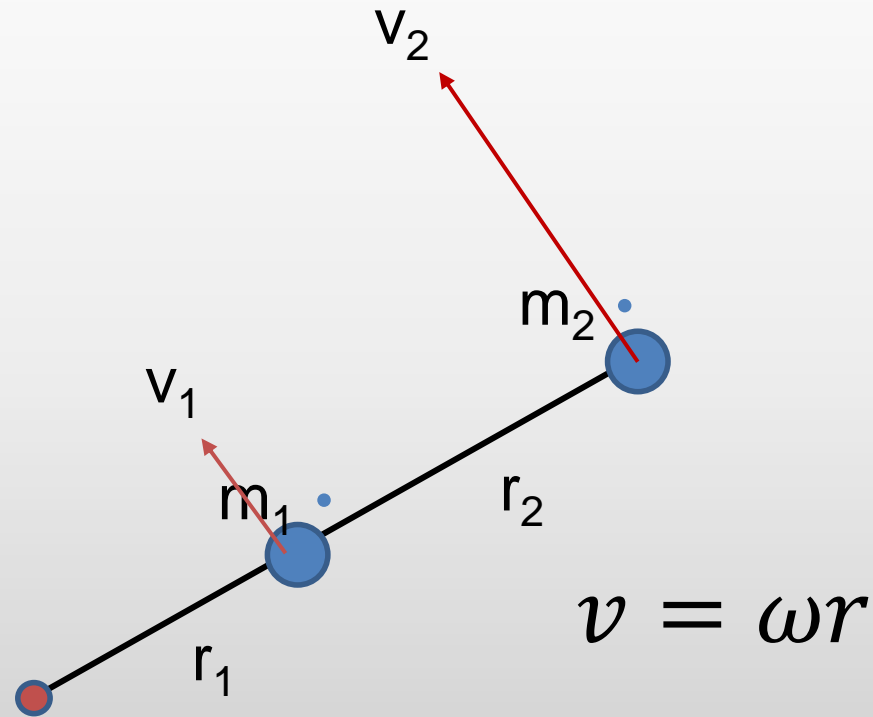
ניסוי לקביעת מרכז המסה של גוף לא סימטרי:



# מרכז המסה של גוף קשיח – "מרכז הכובד"

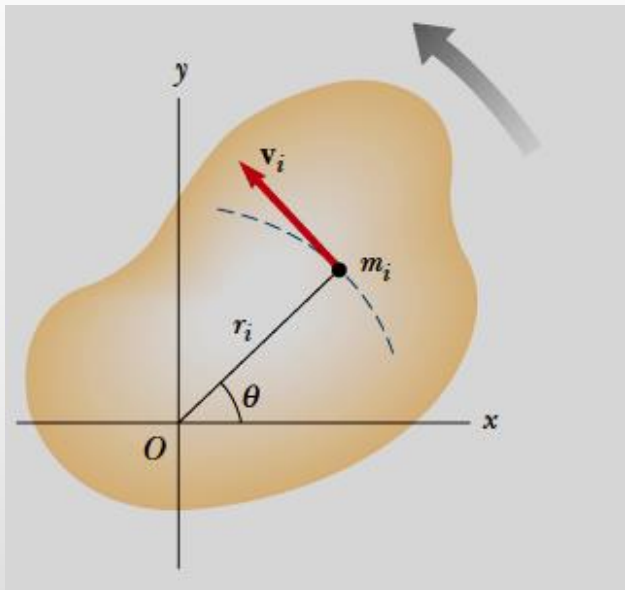


# אנרגיה קינטית סיבובית: דוגמא



$$K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\omega}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = \frac{I \omega^2}{2}$$

# אנרגיה קינטית סיבובית



- האנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים היא סכום אנרגיות החלקיקים:

$$K_i = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

- הגדרת מומנט ההתמד של מערכת חלקיקים:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

- מומנט ההתמד של גוף קשיח:

# מומנט ההתמד של מערכת חלקיקים: דוגמה

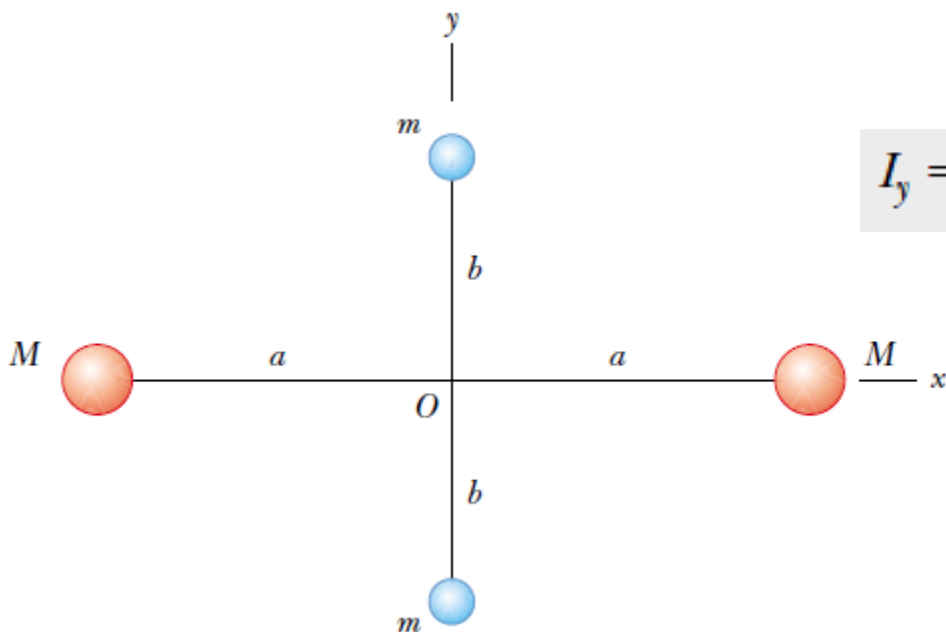
• ארבע מסות מסתובבות:

• (א) סביב ציר  $y$

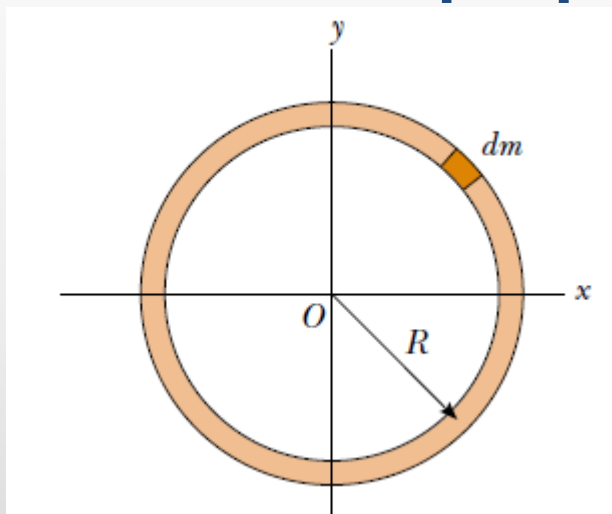
$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

• (ב) סביב ציר מאונך  $z$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$



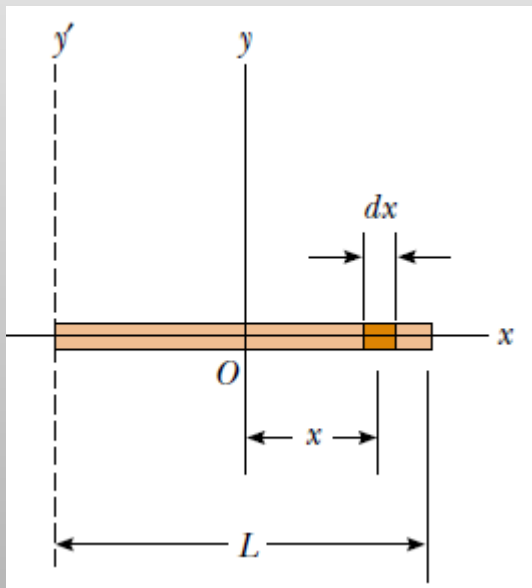
# חישוב מומנט ההתמד של גוף קשיח



• (1) טבעת או גליל חלול

$$I_z = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

• (2) מוט

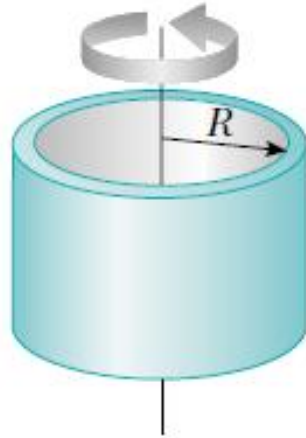


$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

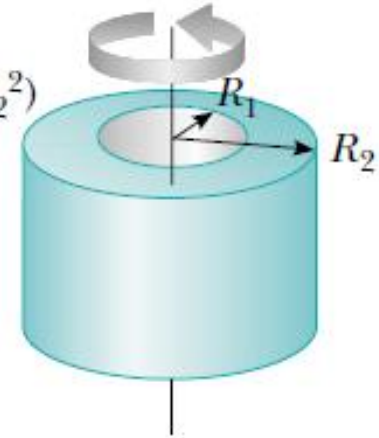
# מומנטי ההתמד של מספר גופים נפוצים

Hoop or  
cylindrical shell  
 $I_{CM} = MR^2$

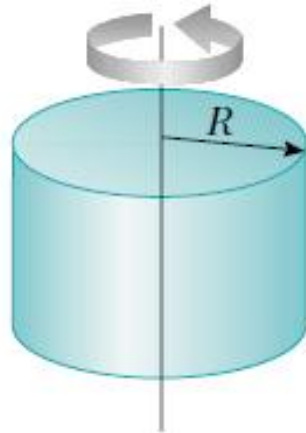


Hollow cylinder

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

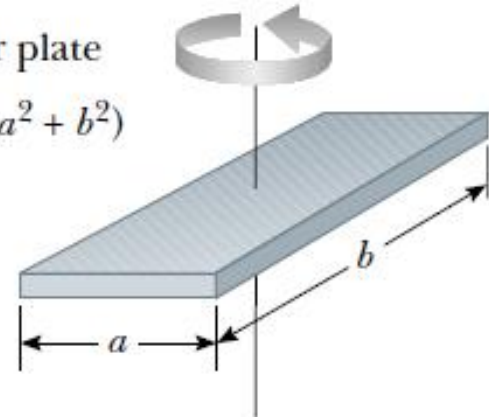


Solid cylinder  
or disk  
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



Rectangular plate

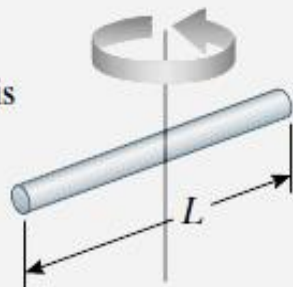
$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



# מומנטי ההתמד של מספר גופים נפוצים

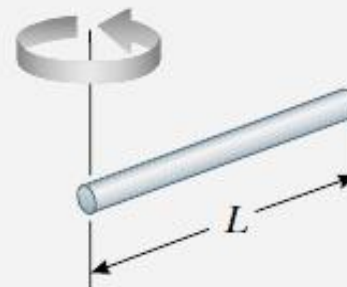
Long thin rod  
with rotation axis  
through center

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$



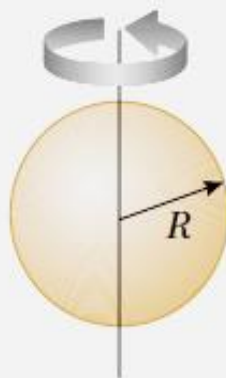
Long thin  
rod with  
rotation axis  
through end

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



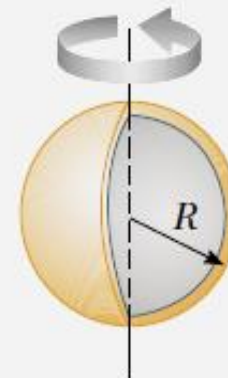
Solid sphere

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$



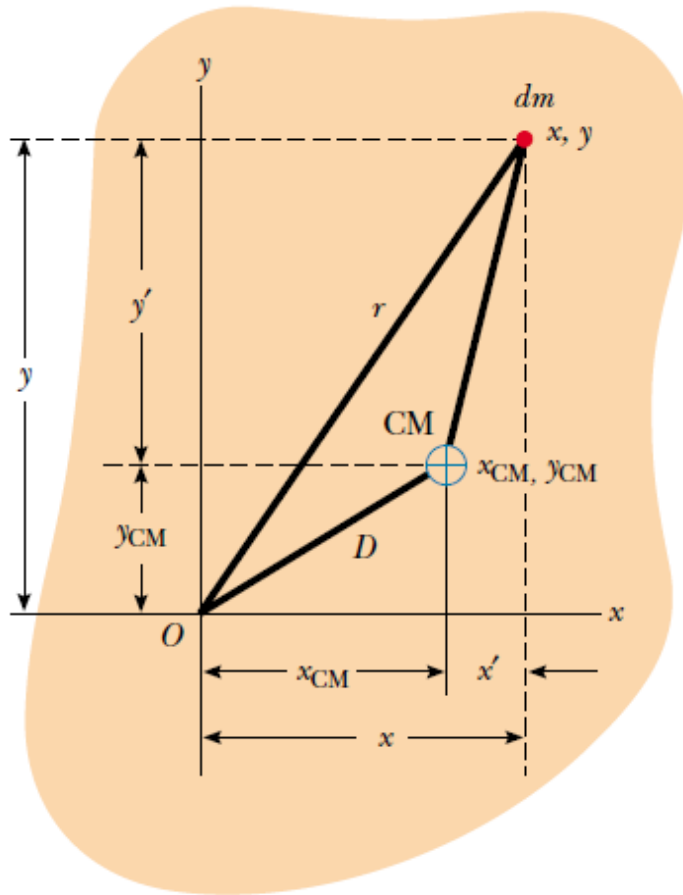
Thin spherical  
shell

$$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$$



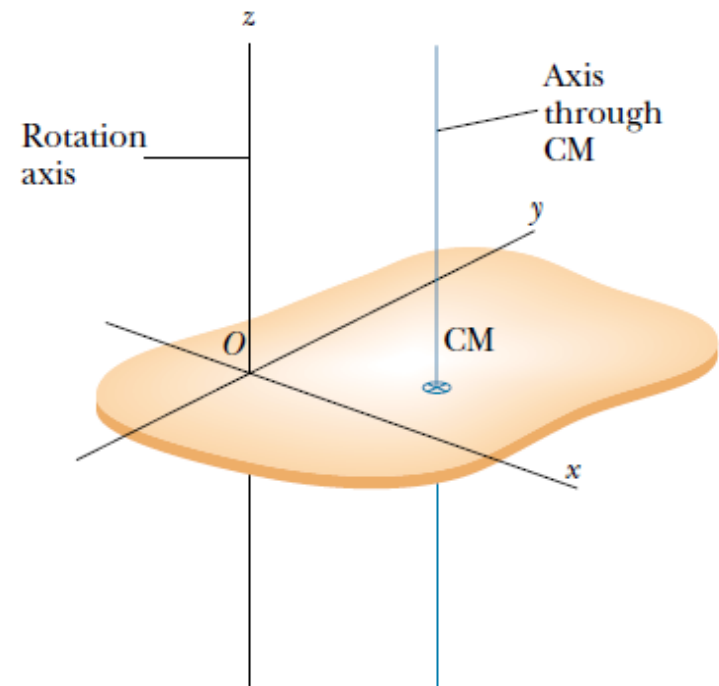


# משפט שטיינר (משפט הציר המקביל)



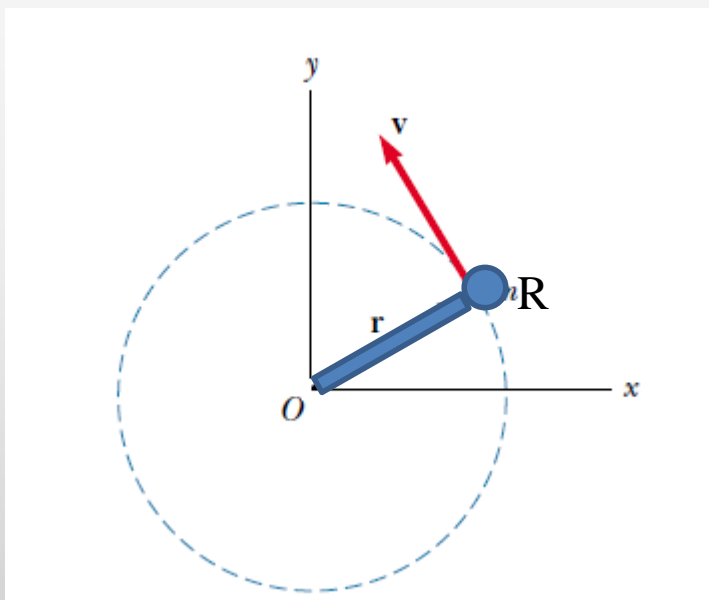
(a)

$$I = I_{CM} + MD^2$$

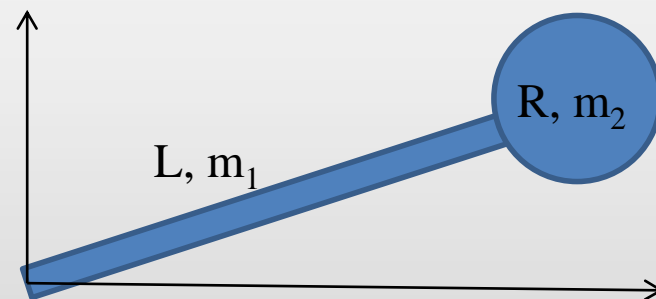


(b)

# חישוב מומנט ההתמד של גופים מורכבים



$$I_1 = \frac{m_1 L^2}{12} + m_1 (L/2)^2 \cdot$$



$$I_2 = \frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 (L + R)^2 \cdot$$

$$I = I_1 + I_2 \cdot$$