מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 1

ווקטורים

הגדרות

חיבור וחיסור וקטורים

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$$

הכפלה בין וקטורים

- מכפלה סקלרית

מכפלה שתוצאתה סקלר. המכפלה הסקלרית בין שני וקטורים $\vec{A}, \vec{B}$ מוגדרת על ידי

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &\equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \end{aligned}$$

כאשר θ היא הזווית בין שני הוקטורים. המשמעות הגיאומטרית של מכפלה סקלרית היא מכפלה של ההיטל של הוקטור $\vec{A}$ על הוקטור $\vec{B}$ ולהפך. המכפלה מתאפסת עבור ווקטורים מאונכים.

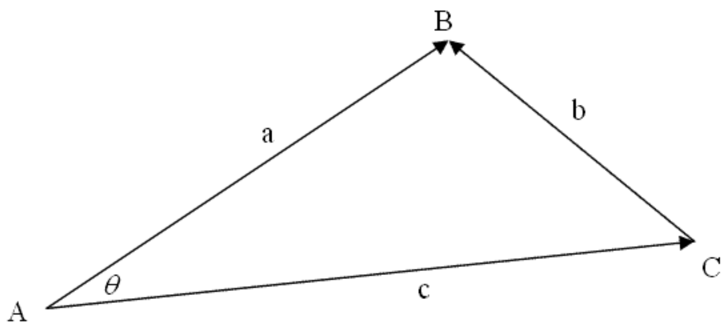
תרגיל 1

א. הוכיחו את משפט הקוסינוסים בעזרת חשבון וקטורי. (למשל חיבור/חיסור וקטורים, מכפלה סקלרית)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta \tag{1}$$

ב. הוכיחו את השוויון

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{C} &\equiv A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \\ &= |\vec{A}||\vec{C}| \cos\theta \end{aligned}$$



פתרון

א. נגדיר $a \equiv \left|\vec{A}\right|^2$, $b \equiv \left|\vec{B}\right|^2$ ו-$c \equiv \left|\vec{C}\right|^2$.

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{C} &= ac\cos\theta \\
\vec{B} &= \vec{A}-\vec{C} \\
\vec{B}\cdot\vec{B} &= \left(\vec{A}-\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{C}\right) = a^2+c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c} \\
b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\theta
\end{aligned}
$$

ב. ראשית ניזכר כי גודל של וקטור נתון ע"י $\left|\vec{A}\right|^2 = A_x^2+A_y^2+A_z^2$. נציב את הרכיבים של הוקטורים $\vec{A}$, $\vec{B}$ ו-$\vec{C}$, נעביר אגפים ונחלק ב-2.

$$
\frac{(A_x-C_x)^2+(A_y-C_y)^2+(A_z-C_z)^2-A_x^2-A_y^2-A_z^2-C_x^2-C_y^2-C_z^2}{2} = ac\cos\theta
$$

$$
A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z = ac\cos\theta
$$

- מכפלה וקטורית

מכפלה בין וקטורים שתוצאתה וקטור. המכפלה הוקטורית בין שני וקטורים $\vec{A},\vec{B}$ מוגדרת על ידי

$$
\vec{A}\times\vec{B} = \left(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\right)\hat{n}
$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים ו $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה הניצב לוקטורים $\vec{A},\vec{B}$ וסימנו מוגדר לפי כלל יד ימין.
הצורה המפורשת של המכפלה הוקטורית היא

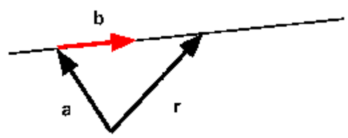
$$
\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z-A_zB_y, A_zB_x-A_xB_z, A_xB_y-A_yB_x)
$$

נוח לכתוב אותה בצורה של דטרמיננטה:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\begin{array}{ccc}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{array}\right|$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left|\begin{array}{ccc}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{array}\right|$$

משוואת קו ישר



משוואת הקו הישר "בוחרת" רק את הנקודות על הקו הישר הרצוי.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{a}+\lambda\vec{b}\\ \vec{r}-\vec{a} &= \lambda\vec{b}\end{aligned}$$

משוואת המישור

ניקח (x_0,y_0,z_0) נקודה במישור, ויהא $\mathbf{N}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ הנורמל למישור. נמצא את כל הנקודות (x,y,z) על המישור. הווקטור

$$\mathbf{r}-\mathbf{r_0}=(x-x_0)\,\hat{x}+(y-y_0)\,\hat{y}+(z-z_0)\,\hat{z}$$

הוא על המישור אם

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})=0$$

לכן משוואת המישור היא

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$$

ניתן להעביר קבועים ולרשום

$$ax+by+cz=d$$

משוואה זו מייצגת אף היא את משוואת המישור. את d נמצא על ידי הצבת נקודה שאנחנו כבר יודעים שנמצאת על המישור.

$$ax_0+by_0+cz_0=d$$

תרגיל 2

1. מצאו את משוואת המישור המכיל את הנקודות $(1,2,3),(1,0,2),(2,4,2)$.
2. באיזו נקודה הישר העובר דרך הנקודות $(9,32,14),(1,0,-2)$ חותך את המישור?

פתרון

1. נפרוש את המישור על ידי שני וקטורים המתחילים מאותה נקודה

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1,2,3)-(1,0,2)=(0,2,1)\\ \vec{b} &= (2,4,2)-(1,0,2)=(1,4,0)\end{aligned}$$

הוקטור המאונך למישור זה הינו

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}\\ &= \hat{x}(2\cdot 0-4\cdot 1)+\hat{y}(1\cdot 1-0\cdot 0)+\hat{z}(0\cdot 4-1\cdot 2)\\ &= -4\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}\end{aligned}$$

לכן משוואת המישור הינה

$$\begin{aligned}&\vec{r}\cdot\boldsymbol{N}=d\\ &-4x+y-2z=d\end{aligned}$$

נמצא את d ע"י הצבת נקודה, לדוגמא $(1,0,2)$

$$-4-4=d\Rightarrow d=-8$$

ומשוואת המישור הינה

$$-4x+y-2z=-8$$

$$4x-y+2z=8$$

2. משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(9,32,14)$, $(1,0,-2)$ היא

$$\vec{r}=(9,32,14)=(1,0,-2)+\lambda\vec{b}$$

$$\lambda\vec{b}=(9,32,14)-(1,0,-2)=(8,32,16)$$

מכיוון ש-λ יכול להיות כל מספר בשביל הנוחות נוציא מכנה משותף מהווקטור ונכניס אותו ל-λ

$$\lambda\vec{b}=(8,32,16)=8(1,4,2)\rightarrow\vec{b}=(1,4,2)$$

כלומר, עבור הנקודה $\vec{r}=(9,32,14)$ צריך לקחת $\lambda=8$.
נכתוב את משוואת הישר הכללית

$$
\vec{r} = (1,0,-2) + \lambda(1,4,2)
$$

או, לפי רכיבים

$$
\begin{aligned}
x &= 1+\lambda \\
y &= 4\lambda \\
z &= -2+2\lambda
\end{aligned}
$$

נציב ערכים אלו במשוואת המישור ונקבל את הערך λ המבוקש

$$
4\left(1+\lambda\right) - 4\lambda + 2\left(-2+2\lambda\right) = 8 \Rightarrow \lambda = 2
$$

ולכן נקודת החיתוך היא ב

$$
\vec{r} = (1+\lambda, 4\lambda, -2+2\lambda) = (3,8,2)
$$