Ex_05_006

(1) על פי הנחת מודל דרודה האלקטרון יוצא מפיזור עם אנרגיה הקשורה לטמפ', ולכן האנרגיה תהיה צבורה לאחר כל פיזור.

האנרגיה שאלקטרון צובר לאחר כל פיזור:

$$\frac{dp}{dt} = eE \Rightarrow p = eEt$$

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(eEt)^2}{2m}$$

(2) הסיכוי להגיע ללא פיזור לזמן $t+\Delta t$:

$$p(t+\Delta t) = p(t)\,p(\Delta t) = p(t)\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$$

$$p(t+\Delta t) - p(t) = -\frac{\Delta t}{\tau}p(t)$$

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} = \frac{dp}{dt} = -\frac{p(t)}{\tau}$$

$$\Rightarrow p(t) = c\,e^{-t/\tau}$$

כיוון ש- $p(0)=1$ נקבל:

$$p(t) = e^{-t/\tau}$$

לכן הסיכוי להתפזר בזמן $t+dt$ הינו:

$$\frac{dt}{\tau}e^{-t/\tau}$$

(3) האנרגיה הממוצעת שנאבדת בכל פיזור (לאלקטרון)

$$\langle\Delta\mathcal{E}\rangle = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E}(t)\,p(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{(eE)^2}{2m}t^2\cdot\frac{dt}{\tau}e^{-t/\tau} =$$

$$= \frac{(eE)^2}{2m}\cdot 2\tau^2 = \frac{(e\tau E)^2}{m}$$

$$W = \frac{n}{\tau}\langle\Delta\mathcal{E}\rangle =$$

$$= \frac{ne^2\tau}{m}E^2 = \sigma_0 E^2$$

האנרגיה הנאבדת ליח' זמן ליח' נפח עבור כל האלקטרונים

זהו $W=\sigma_0 E^2$ - חוק ג'ול.

(5) אם קיים $\vec{\nabla} T$, אז אלקטרון לאחר הפיזור יוצא
עם אנרגיה המתאימה לאנרגיה התרמית באיזור.

השינוי באנרגיה כתוצאה מצבי (האלקטרון נע מ-$\vec{r}$ ל-$\vec{r}+\Delta\vec{r}$)

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}\left(T(\vec{r}+\Delta\vec{r})\right) - \mathcal{E}\left(T(\vec{r})\right)$$

$\mathcal{E}(T)$ - אנרגיה תרמית לאלקטרון בשיווי משקל בטמפ' T.

$$\Rightarrow \Delta \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \vec{r}}\cdot\Delta\vec{r}$$

$\ell = \langle \frac{1}{2} a t^2 \rangle$ - המרחק שעובר אלקטרון בין פיזורים

$$w \simeq -\frac{n}{\tau}\vec{\ell}\cdot\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\vec{\nabla} T$$

$$\underline{w \simeq -\frac{n e \tau}{m}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\vec{E}\cdot\vec{\nabla} T}$$

$$\ell = \langle \tfrac{1}{2} a t^2 \rangle = \int_0^\infty \tfrac{1}{2} a t^2 e^{-t/\tau}\frac{dt}{\tau} = a\tau^2 = \frac{eE}{m}\tau^2$$

גז אלקטרונים אידיאלי

שאלה 1:

לגז אלקטרונים בעל n אלקטרונים ליחידת נפח, וצפיפות מצבים ליחידת אנרגיה ליחידת נפח:

$$g(\varepsilon)=\begin{cases} C\varepsilon^{\alpha} & :\varepsilon\ge 0 \\ 0 & :\varepsilon<0 \end{cases}$$

כאשר $\alpha>-1$, מצאו ביטויים ל $g(\varepsilon_F),\ g'(\varepsilon_F),\ g''(\varepsilon_F)$ בעזרת ε_F, n ו α בלבד.

פתרון:

לפי הנתון,

$$g(\varepsilon_F)=C\varepsilon_F{}^{\alpha},\ g'(\varepsilon_F)=\alpha C\varepsilon_F{}^{\alpha-1},\ g''(\varepsilon_F)=(\alpha-1)\alpha C\varepsilon_F{}^{\alpha-2}.$$

כמו-כן:

$$n=\int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_F} C\varepsilon^{\alpha}\,d\varepsilon=\frac{C\varepsilon_F{}^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

לפיכך,

$$g(\varepsilon_F)=(\alpha+1)\frac{n}{\varepsilon_F},\ g'(\varepsilon_F)=\alpha(\alpha+1)\frac{n}{\varepsilon_F{}^2},\ g''(\varepsilon_F)=(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\frac{n}{\varepsilon_F{}^3}.$$

שאלה 2:

נתון גז של אלקטרונים חופשיים (ללא אינטראקציות) בנפח V בשדה מגנטי חיצוני B.

ניתן להראות ע"י החלפת משתני אינטגרציה כי מספר האלקטרונים עם ספין $\uparrow$ הוא

$$N_{\uparrow}=V\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\varepsilon+\mu_B B)\,f(\varepsilon,\mu)\,d\varepsilon$$

ומספר האלקטרונים עם ספין $\downarrow$ הוא

$$N_{\downarrow}=V\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\varepsilon-\mu_B B)\,f(\varepsilon,\mu)\,d\varepsilon$$

$g_1(\varepsilon)$ היא צפיפות המצבים לאלקטרון עם ספין מסויים (ללא החשבת ניוון הספין)

$f(\varepsilon,\mu)$ היא פונקצית פרמי-דיראק עם פוטנציאל כימי μ

μ_B הוא מגנטון בוהר (מספר קבוע עם יחידות של אנרגיה חלקי שדה מגנטי)

המספר הכולל של אלקטרונים הוא $N=N_{\uparrow}+N_{\downarrow}$.

א. בעזרת פיתוח זומרפלד, מצאו ביטוי לפוטנציאל הכימי עד סדר שני בטמפרטורה בעזרת g_1 וניגזרתה.

ב. בעזרת פיתוח זומרפלד, מצאו ביטוי להפרש $N_{\uparrow}-N_{\downarrow}$ עד סדר שני בטמפרטורה שוב בעזרת g_1 וניגזרתה. השתמשו בפוטנציאל הכימי שמצאתם בסעיף א'.

ג. פתחו את תוצאת סעיף ב' לטור טיילור עד סדר ראשון באנרגיה המגנטית $\mu_B B$, ומצאו ביטוי ל $N_{\uparrow}-N_{\downarrow}$, התלוי לינארית בשדה המגנטי B.

ד. לאלקטרונים, הסוספטביליות המגנטית מוגדרת כך: $\chi=\frac{1}{2}\mu_B\left.\frac{\partial(N_{\uparrow}-N_{\downarrow})}{\partial B}\right|_{B=0}$

הראו כי לאלקטרונים ללא אינטראקציה,

$$\chi(T)=\frac{V}{2}\mu_B^{\,2}\left(g(\varepsilon_F)-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\left(g'(\varepsilon_F)\right)^2}{g(\varepsilon_F)}-g''(\varepsilon_F)\right)(K_BT)^2\right)$$

כאשר ε_F היא אנרגית פרמי, ו $g(\varepsilon)=2g_1(\varepsilon)$ היא צפיפות המצבים כולל ניוון הספין.

ה. הראו כי למקרה של N אלקטרונים ללא אינטראקציה בשלושה מימדים, עם אנרגית פרמי ε_F,

$$\chi(T)=\frac{3N\mu_B^{\,2}}{4\varepsilon_F}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right)$$

כאשר $T_F=\varepsilon_F/K_B$. העזרו בפתרון שאלה מס' 1.

פתרון:

א. נרשום את המשוואה למספר האלקטרונים הכולל, ונשתמש בפיתוח זומרפלד עד סדר שני:

$$N=V\left(\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\varepsilon-\mu_BB)f(\varepsilon,\mu)d\varepsilon+\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\varepsilon+\mu_BB)f(\varepsilon,\mu)d\varepsilon\right)$$

$$=V\left(\int_{-\infty}^{\mu}g_1(\varepsilon-\mu_BB)d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}g_1'(\mu-\mu_BB)(K_BT)^2+\int_{-\infty}^{\mu}g_1(\varepsilon+\mu_BB)d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}g_1'(\mu+\mu_BB)(K_BT)^2\right)$$

נפתח את האינטגרלים עד סדר ראשון סביב ε_F, ואת הביטויים האחרים נפתח עד סדר אפס סביב ε_F:

$$N=V\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon-\mu_BB)d\varepsilon+\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon+\mu_BB)d\varepsilon+\left(g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)(\mu-\varepsilon_F)\right.$$
$$\left.+\frac{\pi^2}{6}\left(g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)(K_BT)^2\right)$$

שני האיברים הראשונים הם מספר האלקטרונים הכולל בטמפרטורה 0, שהוא מספר האלקטרונים הכולל בכל טמפרטורה. לכן,

$$0=\left(g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)(\mu-\varepsilon_F)+\frac{\pi^2}{6}\left(g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)(K_BT)^2$$

$$\rightarrow\mu=\varepsilon_F-\frac{\pi^2}{6}\frac{\left(g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)}{\left(g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)}(K_BT)^2$$

ב. בעזרת אותו פיתוח בו השתמשנו בסעיף א' נקבל

$$N_\uparrow-N_\downarrow=V\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon+\mu_BB)d\varepsilon-\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon-\mu_BB)d\varepsilon+\left(g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)-g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)\right)(\mu-\varepsilon_F)\right.$$
$$\left.+\frac{\pi^2}{6}\left(g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)-g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)\right)(K_BT)^2\right)$$

נציב את הפוטנציאל הכימי שמצאנו בסעיף א', ונקבל

$$N_\uparrow-N_\downarrow=V\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon+\mu_BB)d\varepsilon-\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}g_1(\varepsilon-\mu_BB)d\varepsilon\right.$$
$$-\frac{\pi^2}{6}\frac{\left(g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)-g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)\right)\left(g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)}{\left(g_1(\varepsilon_F-\mu_BB)+g_1(\varepsilon_F+\mu_BB)\right)}(K_BT)^2$$
$$\left.+\frac{\pi^2}{6}\left(g_1'(\varepsilon_F+\mu_BB)-g_1'(\varepsilon_F-\mu_BB)\right)(K_BT)^2\right)$$

ג. באינטגרלים נחליף משתני אינטגרציה $\varepsilon' = \varepsilon \pm \mu_B B$, ונקבל

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_F} g_1(\varepsilon+\mu_B B)\,d\varepsilon - \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} g_1(\varepsilon-\mu_B B)\,d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\varepsilon_F+\mu_B B} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon' - \int_{-\infty}^{\varepsilon_F-\mu_B B} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon'$$

נפתח ביטוי זה עד סדר ראשון ב $\mu_B B$:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_F+\mu_B B} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon' - \int_{-\infty}^{\varepsilon_F-\mu_B B} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon'$$

$$\cong \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon + g_1(\varepsilon_F)\mu_B B - \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_F} g_1(\varepsilon')\,d\varepsilon' - g_1(\varepsilon_F)\mu_B B\right) = 2g_1(\varepsilon_F)\mu_B B$$

גם את שאר הביטויים נפתח עד סדר ראשון ב $\mu_B B$:

$$g_1(\varepsilon_F \pm \mu_B B) = g_1(\varepsilon_F) \pm g_1'(\varepsilon_F)\mu_B B \qquad g_1'(\varepsilon_F \pm \mu_B B) = g_1'(\varepsilon_F) \pm g_1''(\varepsilon_F)\mu_B B$$

נקבל:

$$N_\uparrow - N_\downarrow = V\left(2g_1(\varepsilon_F)\mu_B B - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{2g_1'(\varepsilon_F)\mu_B B\cdot 2g_1'(\varepsilon_F)}{2g_1(\varepsilon_F)} - 2g_1''(\varepsilon_F)\mu_B B\right)(K_B T)^2\right)$$

$$= V\left(g(\varepsilon_F) - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\left(g'(\varepsilon_F)\right)^2}{g(\varepsilon_F)} - g''(\varepsilon_F)\right)(K_B T)^2\right)\mu_B B$$

כאשר השתמשנו בכך שצפיפות המצבים עם החשבת ניוון הספין גדולה פי 2 מצפיפות המצבים ללא החשבתו: $g(\varepsilon) = 2g_1(\varepsilon)$

ד. לקבלת הסוספטביליות, גוזרים את תוצאת סעיף ג' לפי B, ומכפילים ב $\frac{1}{2}\mu_B$. מקבלים:

$$\chi(T) = \frac{V}{2}\mu_B^2\left(g(\varepsilon_F) - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\left(g'(\varepsilon_F)\right)^2}{g(\varepsilon_F)} - g''(\varepsilon_F)\right)(K_B T)^2\right)$$

ה. למקרה של גז תלת מימדי, $g(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, כלומר $\alpha = \frac{1}{2}$, ולפי שאלה 1 נקבל:

$$g(\varepsilon_F) = \frac{3n}{2\varepsilon_F} \qquad g'(\varepsilon_F) = \frac{3n}{4\varepsilon_F^2} \qquad g''(\varepsilon_F) = -\frac{3n}{8\varepsilon_F^3}$$

נציב ונקבל:

$$\chi(T) = \frac{V}{2}\mu_B^2\left(\frac{3n}{2\varepsilon_F} - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\left(\frac{3n}{4\varepsilon_F^2}\right)^2}{\frac{3n}{2\varepsilon_F}} + \frac{3n}{8\varepsilon_F^3}\right)(K_B T)^2\right) = \frac{V\mu_B^2}{2}\left(\frac{3n}{2\varepsilon_F} - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{3n}{8\varepsilon_F^3} + \frac{3n}{8\varepsilon_F^3}\right)(K_B T)^2\right)$$

$$= \frac{N\mu_B^2}{2\varepsilon_F}\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{K_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right) = \frac{3N\mu_B^2}{4\varepsilon_F}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right)$$

כאשר השתמשנו ב $N = n\cdot V$.

<u>מסקנה</u>: עלייה בטמפרטורה "מקלקלת" את המגנטיזציה.