Solution:

$$f(t) = \frac{A}{T}t \qquad 0 < t < T \qquad f(t+T) = f(t)$$

The function may be written as a Fourier series:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \qquad where \qquad \omega_0 = 2\pi/T$$

The Fourier coefficients are defined according to:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T te^{-in\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{T^2}\left(-\frac{t}{in\omega_0}e^{-in\omega_0 t}|_0^T + \frac{1}{in\omega_0}\int_0^T e^{-in\omega_0 t}dt\right) = \frac{A}{T^2}\left(-\frac{T}{in\omega_0}e^{-in\omega_0 T} + \frac{1}{n^2\omega_0^2}(e^{-in\omega_0 T} - 1)\right) = -\frac{A}{iTn\omega_0}$$

where we used

$$\int udv = uv - \int vdu$$

and we set

$$u = t; du = dt$$

$$dv = e^{-in\omega_0 t}dt; v = -\frac{1}{in\omega_0}e^{-in\omega_0 t}$$

For the $n = 0$ coefficient we find

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T tdt = \frac{AT^2}{2T^2} = \frac{A}{2}.$$

Therefore,

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty'} -\frac{A}{iTn\omega_0}e^{in\omega_0 t} = \frac{A}{2} - \frac{A}{T\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{in}\left(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}\right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\omega_0 t)}{n}$$

The ' denotes the fact that the sum does not include the $n = 0$ term and we used $T\omega_0 = 2\pi$.

התמרת פורייה של גיאוסיאן

חשב את התמרת פורייה עבור הפונקצייה הבאה:

$$g\left(x\right)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}}$$

פתרון:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}-ikx}dx$$

נשלים לריבוע:

$$\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}+ikx=\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+a\right)^{2}+b\Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sigma^{2}}=ik\Rightarrow a=ik\sigma^{2}$$

$$\frac{a^{2}}{2\sigma^{2}}+b=0\Rightarrow b=\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}$$

נקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik\sigma^{2}\right)^{2}-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}dx=\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik^{2}\sigma^{2}\right)^{2}}dx$$

נחליף משתנים $du=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^{2}}}\quad u=\frac{x+ik^{2}\sigma^{2}}{\sqrt{2\sigma^{2}}}$ ונקבל:

$$\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{2\sqrt{\pi}\sigma^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du$$

כעת נשתמש באינטגרל הגיאוסיאני:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du=\sqrt{\pi}$$

ונקבל:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{2\sigma^{2}}e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}$$

התמרת פורייה של גיאוסיאן עם רוחב σ היא גיאוסיאן עם רוחב $\frac{1}{\sigma}$. אם הגיאוסיאן המקורי היה צר, ההתמרה שלו רחבה ולהפך.