

Free Particle on a Ring

exercise 3_4303

נתון מודל חד מימדי לחלקיק חופשי הכלוא על טבעת באורך L . נרשום את משוואת שרדינגר לחלקיק חופשי במימד אחד ונדרוש את תנאי השפה:

$$\psi(x, t) = \psi(x + L, t)$$

(א) הראה/י שפתרונות מהצורה $\varphi_n(x, t) = A_n e^{-i(\omega_n t - k_n x)}$ מהווים פתרונות לבעיה בתנאי ש $k_n = \frac{2\pi}{L}n$. מצא/י את יחס הנפיצה $\omega_n(k_n)$. והראה/י שמתקיים $\omega_n = \omega_{-n}$.

(ב) מצא/י את A_n .

(ג) הראה/י שהפתרונות שהוגדרו מהווים בסיס אורתונורמלי $\int_0^L \varphi_n \varphi_m^* dx = \delta_{nm}$.

(ד) נגדיר מצב חדש $\psi_1(x, t) = C\varphi_1 + D\varphi_2$. הראה/י שגם מצב זה מהווה פתרון למשוואת שרדינגר. מצא תנאי על C ו D בכדי שהמצב יהווה מצב קוונטי תקין.

(ה) בהנתן תנאי התחלה $\psi(x, 0) = f(x)$, מצא/י דרך לחשב את המקדמים C_n .

(ו) הכלל את התנאי מסעיף (ד) למצב כללי של המערכת $\psi(x, t) = \sum_n C_n \varphi_n$.
