שאלה 4

תנאי שפה מחזוריים

$$\psi(x+L,t)=\psi(x,t)$$

א.

$$\psi(x,t)=e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\psi(x+L,t)=e^{i(k(x+L)-\omega t)}$$

$$e^{i(kx+kL-\omega t)}=e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\cancel{e^{ikx}}\,e^{ikL}\,\cancel{e^{-i\omega t}}=\cancel{e^{ikx}}\,\cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$e^{ikl}=1$$

$$\cos(kL)+i\sin(kL)=1$$

$$\Rightarrow\quad kL=2\pi n \qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm\ldots$$

$$\Rightarrow\quad k=0,\ \pm\frac{2\pi}{L},\ \pm\frac{4\pi}{L}\ \ldots\ldots$$

$$k=\frac{2\pi n}{L} \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$$

משוואת שרדינגר:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega i e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = +ike^{i(kx-\omega t)} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 e^{i(kx-\omega t)}$$

נציב את הפתרון במשוואה:

$$-i\hbar\omega i\, \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot(-k^2)\cancel{e^{i(kx-\omega t)}}$$

וזה
הדיספרסיה

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2}$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$$

$$\omega_n = \frac{\hbar}{2m}\left[\frac{2\pi n}{L}\right]^2 = \frac{4\pi^2\hbar}{2mL^2}n^2 = \frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}n^2$$

ולכן

$$\omega_n = \omega_{-n}$$

3

ונבדוק את התנאים המתאים;

$$\psi_n(x,t) = A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

כאשר A_n מקדם נרמול

נמצא את A_n

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L A_n^* e^{-i\cancel{(k_n x - \omega_n t)}} \cdot A_n e^{i\cancel{(k_n x - \omega_n t)}} dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L |A_n|^2 dx = 1 \Rightarrow \boxed{A_n = \frac{1}{\sqrt{L}}}$$

מקדם הנרמול

ב

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

$$\psi_m^* = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(k_m x - \omega_m t)}$$

$$\int_0^L \psi_n \psi_m^* dx = \frac{1}{L}\int_0^L e^{i(k_n x - \omega_n t)} e^{-i(k_m x - \omega_m t)} dx$$

4 //

$$= \frac{1}{L}\int_0^L e^{i(k_n x + k_m x - \omega_n t - \omega_m t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L e^{i(x(k_n+k_m) - t(\omega_n+\omega_m))}\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{i(k_n+k_m)}\cdot e^{i((k_n+k_m)x-(\omega_n+\omega_m)t)}\Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{i(k_n+k_m)}\cdot e^{i[(k_n+k_m)\cdot L-(\omega_n+\omega_m)t]} -$$

$$- \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{i(k_n+k_m)}\, e^{-i[(\omega_n+\omega_m)t]}$$

$$k_n+k_m = \frac{2\pi n}{L}+\frac{2\pi m}{L} = \frac{2\pi}{L}(m+n)$$

5 //

$$\frac{1}{L}\,\frac{1}{i(k_n+k_m)}\, e^{i[\frac{2\pi}{L}(m+n)\cdot L-(\omega_n+\omega_m)t]} =$$

$$= \frac{1}{L}\,\frac{1}{i(k_n+k_n)}\, e^{-i(\omega_n+\omega_m)t}$$

$$\int_0^L \psi_n \psi_m^* = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{i(k_n+k_m)} e^{-i[(\omega_n+\omega_m)t]} - \frac{1}{L} \frac{1}{i(k_n+k_m)} e^{i[(\omega_n+\omega_m)t]} = 0$$

לכן אם $m \neq n$ אז $\psi_n \psi_m^* = 0$

במידה ו $m = n$

$$\int_0^L \psi_n \psi_m^* = \frac{1}{L} \int_0^L e^{i(k_n x - \omega_n t)} e^{-i(k_m x - \omega_m t)} dx$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L \psi_n \psi_m^* dx = \delta_{nm}$$

3.

$$\psi_a = C\psi_1 + D\psi_2$$

נכון. זה מהווה פתרון כי משוואת שרדינגר היא ליניארית והומוגנית לכן סכום של פתרונות גם הוא פתרון.

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n$$

נסתכל על אחת מהפונקציות כאשר $n=k$ וננסה למצוא שווה למקדם C_k.

$$\psi_k = c_k \psi_k$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n$$

נכפול ב ψ_k^*

$$\psi_k^* \psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_k^* c_n \psi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n^* \psi_n$$

נעזר אורתוגונליות?

$$\int_0^L \psi_k^* \psi \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^L \psi_k^* \psi_n \, dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nk} = c_k$$

לכן

$$c_k = \int_0^L \psi_k^* \psi \, dx$$

ב/1

1. בדיקת נרמול $\int$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n$$

$$\psi^* \psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \psi_n^* \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \psi_m$$

$$\int_0^L \psi^* \psi \, dx = \int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \psi_n^* \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \psi_m = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m \int_0^L \psi_n^* \psi_m \, dx = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m \delta_{nm} = 1$$

כאשר $n=m$

$$\Rightarrow$$

$$\sum |c_n|^2 = 1$$