

שאלה :

1. השתמש במודל דרודה בכדי להוכיח משיקולים מיקרוסקופים את חוק אום.
2. העריכו את המהלך החופשי של אלקטרון בטמפרטורת החדר ($\tau \approx 10^{-15} \text{sec}$).
3. בטמפרטורת נמוכות ניתן לקבל על ידי חישוב דומה לסעיף קודם כי המהלך החופשי של נחושת הוא כ 82 \AA , האם זה מתאים לרעיון של המודל? מה המודל מפספס?
4. קבלו ביטוי למוליכות במקרה בו השדה הוא : $\vec{E} = E_\omega e^{-i\omega t} \hat{x}$.

פתרון :

1. על מנת לקבל את חוק אום נחפש קשר בין צפיפות הזרם לשדה החשמלי, שכן $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ונקבל ביטוי למוליכות החשמלית.
נשים לב שתוצאה זו מפתיעה ולא טריוויאלית כי אינה מתאימה לחוק ניוטון שאנו מכירים ואוהבים, שאומר שהכוח פרופורציוני לתאוצה ואילו כאן הכוח (שפרופורציוני לשדה החשמלי) פרופורציוני למהירות (שפרופורציונית לצפיפות הזרם).
מאיפה מגיעה אי ההתאמה הזו? היא נובעת מאיבר החיכוך במשוואת דרודה, שנובע מההתנגשויות של האלקטרונים עם היונים, ובעצם מאלץ אותנו להשקיע כוח על מנת לשמור על מהירות קבועה בממוצע.
 \vec{j} הינו וקטור צפיפות הזרם שמסמן את כיוון זרימת הזרם, וגודלו הוא המטען ליחידת זמן ליחידת שטח חתך אנכי לכיוון הזרימה: $\vec{j} = \rho \langle \vec{v} \rangle = -en \langle \vec{v} \rangle$.
את הקשר בין המהירות לשדה נוכל לקבל ממשוואת הכוחות לחלקיק בין ההתנגשויות:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow \vec{v} = -\frac{e\vec{E}t}{m} + \vec{v}_{th}$$

2. כש \vec{v}_{th} הוא הביטוי של המהירות ההתחלתית של חלקיק מיד לאחר התנגשות. מכאן נסתכל על הביטוי של המהירות הממוצעת ונציב בצפיפות הזרם :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{E}\langle t \rangle}{m} + \langle \vec{v}_{th} \rangle = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$$

$$\vec{j} = \frac{e^2 n \tau}{m} \vec{E} \quad \text{ולכן :}$$

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad \text{כשקיבלנו :}$$

2. ננסה להעריך את המהלך החופשי של חלקיק על ידי זמן הרלקסציה (הזמן הממוצע בין התנגשויות עוקבות) בטמפרטורת החדר וגודל המהירות הממוצעת.
זמן הרלקסציה של המערכת בטמפ' החדר (300K) הוא מסדר גודל של $\tau \approx 10^{-15} \text{sec}$ ומחוק

$$\frac{1}{2} m \langle |v_{th}|^2 \rangle = \frac{3}{2} K_B T \rightarrow \langle |v_{th}| \rangle = \sqrt{\frac{3}{m} K_B T}$$

$$l = \tau \langle |v_{th}| \rangle \approx 10^{-15} \sqrt{\frac{3}{m} K_B T} \approx 1 \sim 10 \text{ \AA}$$

הערכה זו נראית סבירה, זהו הסדר גודל של המרחקים בין האטומים בגביש.

3. תוצאה של מהלך חופשי $\sim 82 \text{ \AA}$, לא מתאימה להנחה של מודל דרודה, שהאלקטרונים מתנגשים ביונים, וכאן מקבלים מרחק גדול משמעותית מהמרחק הבין אטומי.

שגיאות במודל:

- המודל לא מתייחס לסדר הפנימי של המוצק. נשים לב שסדר היונים לא מוגדר במודל, וישנה חשיבות לצורת הסידור בגביש.
- אין התייחסות לכך שהאלקטרונים הם פרמיונים (התפלגות פרמי-דיראק ולא בולצמן, עיקרון פאולי).
- אין התייחסות לתרומת היונים במודל חוץ מהפיזור של האלקטרונים (ההתנגשויות) (ניתן לקרוא באינטרנט על הפונונים ותרומתם לקיבול החום למשל).

4. נסתכל על משוואת דרודה :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(t) - \frac{\vec{P}}{\tau}$$

נסתכל על הטרנספורם פורייה ונציב את הכוח: (לאחר פורייה נקבל כי $\frac{d}{dt} \rightarrow -i\omega$)

$$-i\omega P_\omega = -eE_\omega - \frac{P_\omega}{\tau}$$

$$P_\omega = -\frac{eE_\omega}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

$$j_\omega = -en \frac{P_\omega}{m} = \frac{e^2 n \tau}{m} \left(\frac{1}{1 - i\omega\tau} \right) E_\omega = \sigma_0 \left(\frac{1}{1 - i\omega\tau} \right) E_\omega$$

קיבלנו ביטוי למוליכות כתלות בתדירות: $\sigma(\omega) = \sigma_0 \left(\frac{1}{1 - i\omega\tau} \right)$