

פונקציות ונגזרות

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

פונקציות

פונקציה היא חוק השמה של קלט x לפלט $f(x)$. הקלט שעבורו הפונקציה מוגדרת (אוסף כל ערכי x) נקרא **תחום ההגדרה** של הפונקציה. הפלט (אוסף כל ערכי $f(x)$ שניתן לקבל) נקרא **הטווח** של הפונקציה.

לדוגמה, עבור הפונקציה e^x תחום ההגדרה הוא כל הציר הממשי, $-\infty < x < \infty$, אבל הטווח הוא המספרים החיוביים: $e^x > 0$.

הפונקציה ההופכית לפונקציה f , שנסמנה f^{-1} , היא הפונקציה המקיימת

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (1)$$

לדוגמה, הפונקציה ההופכית של

$$f(x) = e^x \quad (2)$$

היא

$$f^{-1}(x) = \ln x \quad (3)$$

לפעמים ניתן להגדיר פונקציה הופכית רק עבור תחום חלקי של הפונקציה המקורית, לדוגמה עבור

$$f(x) = x^2 \quad (4)$$

בתחום $x \geq 0$ ניתן להגדיר

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (5)$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

גבולות

הגבול של פונקציה $f(x)$ כש- x מתקרב ל- x_0 הוא הערך f_0 אם ערך הפונקציה מתקרב לערך זה כאשר x מתקרב ל- x_0 , ויסומן

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (6)$$

דוגמה:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad (7)$$

נדגיש שבתהליך לקיחת הגבול $x \neq x_0$ בכל שלב, לכן העובדה ש- $(x - 1)$ מתאפס עבור $x = 1$ לא הפריעה לנו לחלק בו.

מתקיימות התכונות הבאות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f_0g_0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0} \quad \bullet \text{ אם } g_0 \neq 0$$

נגזרות

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 תסומן $f'(x_0)$, והיא הגבול

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (8)$$

הנגזרת מתארת את קצב השינוי של הפונקציה כתלות ב- x . סימונים נוספים לנגזרת הם

$$f'(x) \equiv \dot{f}(x) \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f \quad (9)$$

כאשר הסימון \equiv מתאר שקילות. הנגזרת השנייה (הנגזרת של הנגזרת הראשונה) מסומנת

$$f''(x) \equiv \ddot{f}(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d^2}{dx^2} f \quad (10)$$

דוגמה: נוכיח לפי ההגדרה ש- $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ ואומנם:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \quad (11)$$

נגזרות של מספר פונקציות ידועות:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (19)$$

נגזרות מקיימות את היחסים הבאים:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x) \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x) \quad (21)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (22)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (23)$$

נוכיח לפי ההגדרה את כלל המכפלה לעיל:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} \quad (24)$$

$$= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} \quad (25)$$

$$= \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} g(y) \right] + \lim_{y \rightarrow x} \left[f(x) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right] \quad (26)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (27)$$

עבור הרכבה של פונקציות מתקיים **כלל השרשרת**

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) \quad (28)$$

ניתן לרשום זאת גם בצורה יותר אינטואיטיבית כ-

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (29)$$

דוגמה:

$$f(x) = \sin\left(\frac{a}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{a}{x^2} \cos\left(\frac{a}{x}\right)$$

דוגמה: נגזרת של פונקציה מעריכית

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} (e^{\ln a})^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \quad (30)$$

הנגזרת של פונקציה הופכית מקיימת

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (31)$$

כדי להבין משוואה זו, נסמן $y = f^{-1}(x)$ כך ש- $x = f(y)$ ונקבל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (32)$$

דוגמה: ניקח את הפונקציה $f(x) = e^x$ שלגביה ידוע ש- $f'(x) = e^x$ ונחשב את הנגזרת של הפונקציה ההופכית שלה, $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (33)$$

הקירוב הליניארי

ניתן לרשום **קירוב ליניארי** לפונקציה באזור הנקודה x_0 באופן הבא:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (34)$$

זה מתקיים מפני ש-

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (35)$$

נשים לב שמשוואה (34) מתארת קו ישר. זהו הישר המשיק לפונקציה בנקודה x_0 - ראו איור 1.

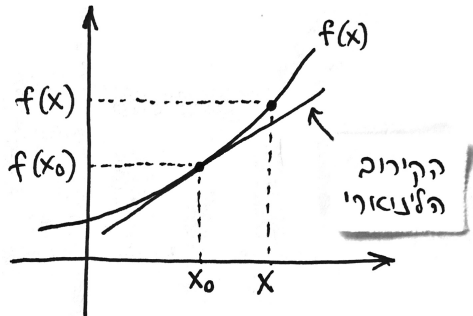
דוגמה: הקירוב הליניארי לפונקציה

$$f(x) = e^x \quad (36)$$

באזור הנקודה $x_0 = 0$ הוא

$$f(x) \simeq e^0 + e^0(x - 0) \quad (37)$$

$$= 1 + x \quad (38)$$



איור 1: קירוב ליניארי לפונקציה.

כלל לופיטל

כלל לופיטל (L'Hôpital): אם

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad (39)$$

אז מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (40)$$

בתנאי שהגבול $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

הסבר: נשתמש בקירוב הליניארי עבור הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ באזור הנקודה $x = c$:

$$f(x) \simeq 0 + f'(c)(x - c) \quad (41)$$

$$g(x) \simeq 0 + g'(c)(x - c) \quad (42)$$

ונקבל

$$\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (43)$$

דוגמה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad (44)$$

הרחבות לכלל לופיטל:

1. הכלל תקף גם כאשר $c = \infty$. כדי להוכיח זאת, נגדיר משתנה $y = 1/x$ ונשתמש בכלל לופיטל המקורי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (45)$$

2. אותו הכלל תקף גם עבור המקרה של

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty \quad (46)$$

גם כאן ההוכחה משתמשת בכלל לופיטל המקורי:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{-g'(x)/g(x)^2}{-f'(x)/f(x)^2} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (47)$$

מכאן נחלץ ש-

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (48)$$

דוגמה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (49)$$