תרגול 1- מבוא מתמטי+חישוב מטען כולל

שבת 22 אוקטובר 2022 11:56

תרגיל 1

$\vec{b} = (2,1)$,$\vec{a} = (1,-3)$

1. מהו אורך כל וקטורי.
2. מהם וקטורי היחידה $\hat{a}, \hat{b}$.
3. מהו הסכום וההפרש של הוקטורים.
4. מהי המכפלה הסקלרית ביניהם.
5. מהי הזוית ביניהם.
6. מצא את ההצגה הפולרית (r, ϕ) של שני הוקטורים.

פתרון 1:

(1)

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

(2) נרצה לנרמל את $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ באמצעות סעיף 1:

$$\hat{a} = \frac{(1,-3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\hat{b} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

(3)

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,-3)+(2,1) = (3,-2)$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (1,-3)-(2,1) = (-1,-4)$$

$$\vec{b}-\vec{a} = (2,1)-(1,-3) = (1,4)$$

(4)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,-3)\cdot(2,1) = 1\cdot 2 - 3\cdot 1 = 2-3 = -1$$

(5) ראינו ש- $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$

לכן נשתמש בסעיף 4 ו-1:

$$-1 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{50}} \longmapsto \varphi \simeq 98^\circ$$

6 עבור $\vec{a}$:

$$r = |\vec{a}| = \sqrt{10} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{-3}{1} = -3 \longrightarrow \varphi \simeq -71.56^\circ$$

נשים לב שהמינוס בעצם מציין שהזווית מציר x היא עם כיוון השעון ולא נגד.

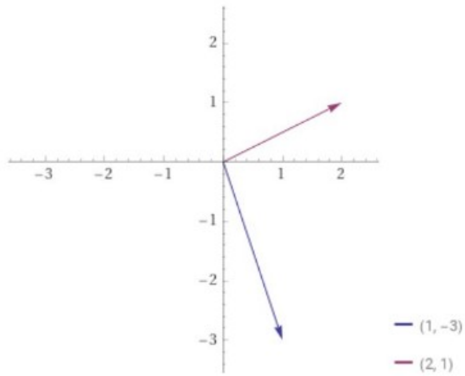
$$\vec{a} = \left(\sqrt{10} \cdot \cos(\varphi), \sqrt{10} \sin(\varphi)\right)$$

עבור $\vec{b}$:

$$r = |\vec{b}| = \sqrt{5}$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{2} \longrightarrow \varphi \simeq 26.56^\circ$$

$$\vec{b} = \left(\sqrt{5} \cos(\varphi), \sqrt{5} \sin(\varphi)\right)$$



תרגול 2:

$\vec{A}=(a-4,2,0)\ ,\ \ \vec{B}=(2a,3,0)$

1. עבור אילו ערכי a הוקטורים ניצבים זה לזה $\vec{A}\perp\vec{B}$.
2. עבור אילו ערכי a הוקטורים מקבילים זה לזה $\vec{A}\parallel\vec{B}$.
3. מצא וקטור C הניצב לוקטורים A ו-B.

פתרון 2:

א) נזכור שוקטורים הם ניצבים רושם מכפלה סקלרית שלהם שווה ל-0 או לחילופין הזווית ביניהם היא $\frac{\pi}{2}$.

לכן:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=0=(a-4,2,0)\cdot(2a,3,0)=$$

$$=2a^2-8a+6=0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$a_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot2\cdot6}}{4}\quad\begin{cases}a_1=3\\ a_2=1\end{cases}$$

2) עבור וקטורים מקבילים הזווית ביניהם היא אפס או π.

לכן: $\vec{A}\times\vec{B}=0$ כי $\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{j} & \hat{z}\\ a-4 & 2 & 0\\ 2a & 3 & 0\end{vmatrix}=\hat{x}(0)-\hat{j}(0)+\hat{z}(3(a-4)-4a)$$

$$=(0,0,-a-12)=0$$

$$\Downarrow$$

$$a = -12$$

(3) מכפלה וקטורית בין שני וקטורים בעצם נותנת לנו וקטור ניצב ל-2 האחרים ולכן בעצם הוקטור שמצאנו בסעיף קודם הוא ניצב ל-A ו-B

כלומר הוקטור $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ ניצב ל-$\vec{A}, \vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = (0, 0, -12-a)$$

תרגיל 3:

[redacted]

3. חשב נפח של גליל ברדיוס R ובאורך L.
4. חשב שטח של גליל ברדיוס R ובאורך L.

(5) חשבו נפח חרוט.

פתרון 3:

(3) נשתמש בקורדינטות גליליות:

$$V = \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R 1\cdot \underbrace{r}_{\text{יעקוביאן}}\, dr\, d\varphi\, dz = \frac{R^2}{2}\cdot 2\pi\cdot L \underbrace{= \pi L R^2}$$

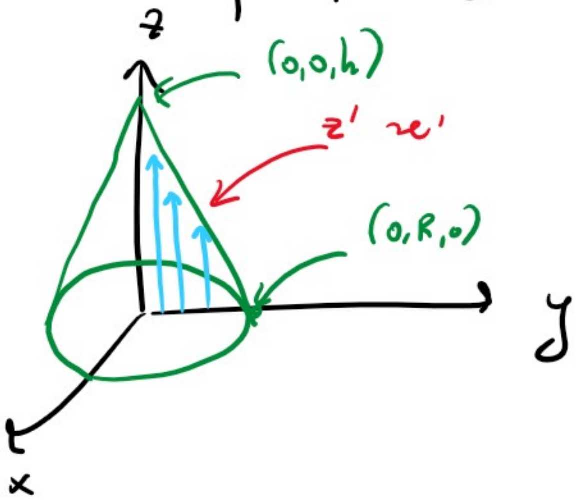
הגיוני כי זה שטח מעגל כפול גובה גליל.

(4)

$$S' = \int_0^L\int_0^{2\pi} R\, d\varphi\, dz \underbrace{= 2\pi R h}$$

הגיוני כי זה היקף מעגל כפול גובה גליל.

5) נצייר חרוט במערכ׳ צירים כך:



נמצא את משוואת הישר z' עפ"י המקדם: $z'=mr+b$

כאשר m השיפוע והוא $m=-\frac{h}{R}$ וקו החיתוך הינו $b=h$

לכן: $z'=-\frac{h}{R}\cdot r+h$

נשתמש בקורדינטות גליליות:

$$V_{\text{חרוט}}=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{z'}dz\,r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^{R}r\cdot z'\,dr=$$

על φ

ואז על z.

$$=2\pi\int_0^{R}r\left(-\frac{hr}{R}+h\right)dr=2\pi\left[-\frac{h}{R}\cdot\frac{r^3}{3}+h\frac{r^2}{2}\right]_0^{R}=$$

$$=2\pi\left[-\frac{h}{3}\cdot R^2+\frac{h}{2}\cdot R^2\right]=\frac{1}{6}\pi R^2 h$$

תרגול 4:

חשבו את כמות המטען הכוללת המצוייה בכדור ברדיוס R וצפיפות מטען $\rho(r,\theta)=\rho_0 r\cos^2\theta$

פתרון 4:

נתון לנו צפיפות <u>מטען נפחית</u> ρ ולכן כדי לחשב מטען כולל בתוך נפח של ספירה נצטרך לעשות אינטגרל משולש:
ונשתמש בקורדינטות ספריות

$$Q = \iiint \rho \cdot dV =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (\rho_0 r\cos^2\theta)\cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \rho_0 \cdot 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3 \cos^2\theta \sin\theta \, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi\rho_0 \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \cos\theta \\ d\alpha = -\sin\theta \, d\theta \end{array} \right\}$$

$$= 2\pi\rho_0 \frac{R^4}{4} \int_1^{-1} \alpha^2 \cdot (-d\alpha) = -2\pi\rho_0 \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\alpha^3}{3}\Big|_1^{-1} =$$

$$= -2\pi\rho_0 \frac{R^4}{4}\left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$Q = \frac{4\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{R^4}{4}$$