טור טיילור

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

נרצה לפתח פונקציה לטור חזקות (טור טיילור) סביב נקודה x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n \tag{1}$$
$$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \tag{2}$$

דרך כזו לכתוב את הפונקציה שימושית במיוחד לתיאור הפונקציה בתחום ערכי x בסביבת x_0, כי אז ניתן להסתפק במספר קטן של איברים מתחילת הטור, בעוד ששאר האיברים יהיו זניחים. הפולינום הקצר שמתקבל מקירוב כזה הוא הרבה פעמים משהו שהרבה יותר קל לעבוד איתו מאשר עם הפונקציה המקורית.

מהם ערכי הפרמטרים c_n שיתארו פונקציה נתונה $f(x)$ עבור בחירה נתונה של x_0? ראשית נציב במשוואה לעיל $x = x_0$ ונקבל

$$c_0 = f(x_0)$$

כעת נגזור את המשוואה, ואז נציב $x = x_0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + c_2 2(x - x_0) + c_3 3(x - x_0)^2 + c_4 4(x - x_0)^3 + \dots \\ c_1 &= f'(x_0) \end{aligned}$$

נגזור פעמיים ונציב $x = x_0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= c_2 2 + c_3 2 \cdot 3(x - x_0) + c_4 3 \cdot 4(x - x_0)^2 + \dots \\ c_2 &= \frac{1}{2} f''(x_0) \end{aligned}$$

נגזור שלוש פעמים ונציב $x = x_0$:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= c_3 2 \cdot 3 + c_4 2 \cdot 3 \cdot 4(x - x_0) + \dots \\ c_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_0) \end{aligned}$$

וכך הלאה. באופן כללי נוכל להראות:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{3}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

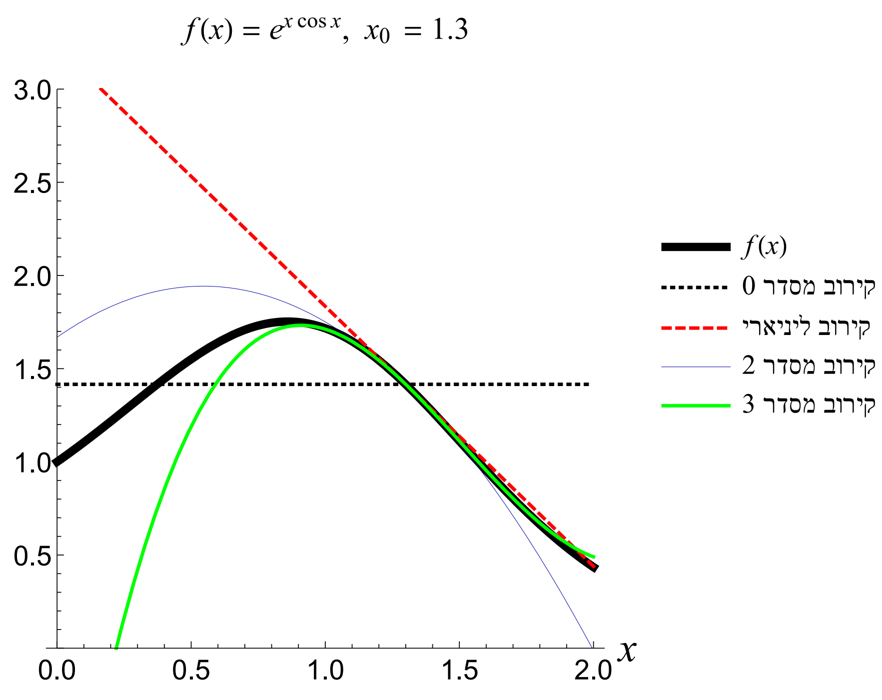
נשים לב שנוסחה זו מבטיחה שכל הנגזרות של הטור שוות לנגזרות הפונקציה בנקודה x_0:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-x_0\right)^n\right)\Bigg|_{x=x_0} = k!\, c_k = f^{(k)}(x_0) \tag{4}$$

לסיכום, נסמן $\Delta x = x - x_0$ ונרשום

$$\boxed{f(x) = f(x_0+\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\left(\Delta x\right)^n} \tag{5}$$

באיור 1 ניתן לראות דוגמה של פונקציה, $f(x) = e^{x\cos x}$, וקירובים שונים לפונקציה זו באמצעות פיתוח טיילור סביב הנקודה $x_0 = 1.3$ כאשר כוללים רק מספר איברים ראשונים מהטור. כבר נתקלנו במקרה פרטי של זה, שבו לוקחים רק את האיברים $n = 0$ ו־$n = 1$, תחת השם "הקירוב הליניארי". האיבר עם הנגזרת השנייה ($n = 2$) מדייק את הקירוב הליניארי ע"י כך שהוא לוקח בחשבון שערך הנגזרת $f'(x)$ משתנה עם x בקצב הנתון בסביבת x_0 ע"י $f''(x_0)$. באופן דומה, האיבר עם הנגזרת השלישית ($n = 3$) לוקח בחשבון שהנגזרת השנייה $f''(x)$ משתנה בקצב הנתון ע"י $f'''(x_0)$, וכן הלאה.



איור 1: הפונקציה $f(x) = e^{x\cos x}$ וקירובים לפונקציה זו באזור הנקודה $x_0 = 1.3$.

עבור פיתוח סביב $x=0$ (כלומר עבור $x_0=0$) מתקבלת הנוסחה

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n} \tag{6}$$

דוגמאות לפיתוחים סביב $x=0$:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots \tag{7}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots \tag{8}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots \tag{9}$$

$$(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\dots \tag{10}$$

עבור x קטן ($|x|\ll 1$) כל איבר בטור קטן בהרבה מקודמיו, כך שניתן לקבל קירוב טוב לפונקציה ע"י מספר קטן של איברים מתחילת הטור.

שימו לב גם שניתן לקבל את הטור עבור $\cos x$ באמצעות גזירת הטור של $\sin x$.

דוגמה: נפתח את $f(x)=\sin x$ סביב $x=\pi/2$ עד סדר רביעי:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1\\
f'(x) &= \cos x & \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0\\
f''(x) &= -\sin x & \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1\\
f'''(x) &= -\cos x & \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0\\
f''''(x) &= \sin x & \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1
\end{aligned}$$

אז מקבלים

$$\sin x = 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\dots \tag{12}$$

ניתן היה לקבל תוצאה זו גם באמצעות הזהות

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \tag{13}$$

ושימוש בטור טיילור של $\cos y$ סביב $y=0$

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\dots \tag{14}$$

דוגמה: נפתח את הפונקציה

$$f(x) = \frac{\sin x\sqrt{1+2x^2}}{x} \tag{15}$$

סביב $x=0$ עד סדר שני ב־x. ניתן לקבל את התוצאה ע"י חישוב הנגזרות המתאימות, אבל נרצה להראות דרך אחרת, שנעזרת בטורים ידועים של פונקציות פשוטות:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x\sqrt{1+2x^2}}{x} &= \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5)\right)\left(1+\frac{1}{2}2x^2+\mathcal{O}\left((2x^2)^2\right)\right)}{x} && (16)\\
&= \left(1-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}(x^4)\right)\left(1+x^2+\mathcal{O}\left(x^4\right)\right) && (17)\\
&= 1-\frac{x^2}{6}+x^2+\mathcal{O}(x^4) && (18)\\
&= 1+\frac{5}{6}x^2+\mathcal{O}(x^4) && (19)
\end{aligned}$$

בשלב הראשון, עבור $\sin x$ השתמשנו במשוואה (8), וכדי לטפל בשורש שמנו לב שכש־x שואף ל־0 גם $2x^2$ שואף ל־0, אז השתמשנו במשוואה (10) עבור $(1+x)^p$ עם $p=1/2$ ועם $2x^2$ במקום ה־x. הסימון $\mathcal{O}(x^n)$ מייצג איברים מסדר x^n ומעלה.

דוגמה מפיזיקה: לפי תורת היחסות, האנרגיה של חלקיק חופשי בעל מסה m עם תנע $\vec{p}$ נתונה על־ידי

$$E = \sqrt{m^2c^4+\vec{p}^2c^2} \tag{20}$$

כאשר c היא מהירות האור. עבור חלקיק במנוחה ($\vec{p}=0$) מקבלים את הביטוי המפורסם $E=mc^2$ המתאר את האנרגיה הטמונה במסה של החלקיק. אז האנרגיה הקינטית היא

$$\begin{aligned}
E_K &= \sqrt{m^2c^4+\vec{p}^2c^2}-mc^2\\
&= mc^2\left(\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}-1\right) && (21)
\end{aligned}$$

בגבול הלא־יחסותי (מהירויות קטנות בהרבה ממהירות האור) מתקיים

$$\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2} \ll 1 \tag{22}$$

ואז שימושי לפתח את השורש בטור טיילור (בדומה למה שעשינו בדוגמה הקודמת). כך מקבלים את הביטוי הלא־יחסותי לאנרגיה הקינטית:

$$E_K = mc^2\left(1+\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}+\ldots-1\right) = \frac{\vec{p}^2}{2m}+\ldots \tag{23}$$

דוגמה: נפתח את הפונקציה הבאה סביב $x = 0$ עד סדר שלישי:

$$\frac{1+\sin^3 x}{\cos x} = \frac{1+\left(x+\mathcal{O}(x^3)\right)^3}{1-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)} \tag{24}$$

$$= \left(1+x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)\right) \tag{25}$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^3+\mathcal{O}(x^4) \tag{26}$$

כאשר טיפלנו במכנה באמצעות משוואה (10) עבור $(1+x)^p$ עם $p=-1$ ועם $-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^4)$ במקום ה־x.

טור טיילור עם שארית

נוכל לרשום פונקציה באמצעות פיתוח מסדר n סביב נקודה x_0 כך:

$$f(x) = c_0 + c_1\Delta x + c_2\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + c_n\left(\Delta x\right)^n + R_n(\Delta x) \tag{27}$$

כאשר $\Delta x = x - x_0$. הפיתוח נקרא טור טיילור עם שארית, וניתן להוכיח שאיבר השארית מקיים

$$R_n(\Delta x) = \frac{(\Delta x)^{n+1} f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} \tag{28}$$

כאשר $\bar{x}$ נמצא בין x ל־x_0.

דוגמה: בפיתוח לטור טיילור של $\sin x$ סביב $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{29}$$

נסתכל על השארית בסדר 4 (כלומר מצב שבו אנחנו מזניחים את האיבר עם x^5 וחזקות גבוהות יותר):

$$R_4(x) = \frac{x^5 f^{(5)}(\bar{x})}{5!} = \frac{x^5\cos\bar{x}}{5!} \tag{30}$$

מכאן אנו יכולים להסיק ש־

$$|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \tag{31}$$

לכל $|x| < 1$ זה יהיה מספר קטן. ניקח למשל $x = \pi/6$. החסם לשגיאה יהיה

$$|R_4(\pi/6)| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 = 0.000328 \tag{32}$$

זה קטן מאוד ביחס לתוצאה עצמה:

$$\sin(\pi/6) \simeq \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = 0.499674 \tag{33}$$

ביחס לתשובה המדויקת, $\sin(\pi/6) = 1/2$, השגיאה בפועל היא 0.000326, והיא אכן מקיימת את החסם.