מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 2

אינדקסים

המשוואה הווקטורית

$$\vec{A} = \vec{B}$$

מבטאת בעצם שלוש משוואות, כי כל אחד מהרכיבים בפני עצמו צריך להיות שווה לרכיב המתאים בוקטור השנית את שלושת המשוואות ניתן לכתוב בצורה קומפקטית בעזרת אינדקסים

$$A_i = B_i$$

הדלתא של קרוניקר

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & else \end{cases}$$

סימן לוי צ'וויטה:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & cyclic \\ -1, & anticyclic \\ 0, & else \end{cases}$$

זהויות:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} &= \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell} \end{aligned}$$

הגדרות לפי אינדקסים:

נגדיר שעבור רכיבי הוקטור נשתמש באותיות קטנות, כלומר $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$.

- ווקטור

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \sum_i a_i \hat{e}_i = a_i \hat{e}_i \\ \vec{B} &= \sum_i b_i \hat{e}_i = b_i \hat{e}_i \end{aligned}$$

- הכפלה סקלרית

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sum_i a_i b_i = a_i b_i \\ &= \sum_{ij} \delta_{ij} a_i b_j = \delta_{ij} a_i b_j \end{aligned}$$

- הכפלה ווקטורית

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i$$

- לפי רכיב ה-i

$$C_i = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

תרגיל 1

הראו באמצעות אינדקסים ש:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

פתרון

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k = -\epsilon_{ikj} a_j b_k = -\epsilon_{ikj} b_k a_j = -\left(\vec{B} \times \vec{A}\right)_i$$

תרגיל 2

הוכיחו את הזהות הבאה על ידי שימוש באינקסים:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

השתמשו בזהות:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

פתרון

$$\begin{aligned}
\left(\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)\right)_i =& \epsilon_{ijk} a_j \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)_k = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_\ell c_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j b_\ell c_m \\
=& \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right) a_j b_\ell c_m \\
=& \delta_{i\ell}\delta_{jm} a_j b_\ell c_m - \delta_{im}\delta_{j\ell} a_j b_\ell c_m \\
=& a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
=& b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
=& \left[\vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\right]_i
\end{aligned}$$

תרגיל 3

הוכיחו את זהות יעקובי באמצעות אינדקסים:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$$

פתרון

$$\begin{aligned}\left[\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right]_i &=\epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{k\ell m}b_\ell c_m+\epsilon_{ijk}b_j\epsilon_{k\ell m}c_\ell a_m+\epsilon_{ijk}c_j\epsilon_{k\ell m}a_\ell b_m\\ &=\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)a_jb_\ell c_m+\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)b_jc_\ell a_m\\ &+\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)c_ja_\ell b_m\\ &=\delta_{i\ell}\delta_{jm}\left(a_jb_\ell c_m+b_jc_\ell a_m+c_ja_\ell b_m\right)\\ &-\delta_{im}\delta_{j\ell}\left(a_jb_\ell c_m+b_jc_\ell a_m+c_ja_\ell b_m\right)\\ &=a_jb_ic_j+b_jc_ia_j+c_ja_ib_j-a_jb_jc_i-b_jc_ja_i-c_ja_jb_i=0\end{aligned}$$

פונקציה

פונקציה היא כלל השמה של קלט x לפלט $f(x)$. הקלט עבורו הפונקציה מוגדרת (אוסף כל ערכי x) נקרא תחום ההגדרה של הפונקציה. הפלט (אוסף כל ערכי $f(x)$) נקרא טווח ההגדרה של הפונקציה.

פונקציה הופכית

הפונקציה ההופכית $f^{-1}(x)$ היא פונקציה המקיימת $f^{-1}(f(x))=x$. כלומר, היא לוקחת כל ערך בטווח ההגדרה ומחזירה את הערך המתאים מתחום ההגדרה. בשפה חופשית, זו פונקציה ש"מבטלת" את פעולתה של f.
צריך לשים לב שלא תמיד טווח ההגדרה של $f^{-1}(x)$ הוא כל תחום ההגדרה של $f(x)$. למשל עבור הפונקציה $f(x)=x^2$, שתחום ההגדרה שלה הוא $-\infty<x<\infty$ הפונקציה ההופכית תהיה $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ שטווח ההגדרה שלה הוא $y>0$.
איך מציירים פונקציה הופכית?
המטרה שלנו היא להפוך תפקידים בין ציר x לציר y, נפרק לכמה תהליכים.

1. נחליף בין ציר y לציר x ע"י סיבוב ציר סביב ציר z ב-90 מעלות עם כיוון השעון.

2. כעת נרצה להעלות את ציר הx כלפי מעלה ע"י סיבוב של 180 מעלות של הציר שy יושב בו כעת.

3. נשנה בין התפקידים של הצירים x וy.

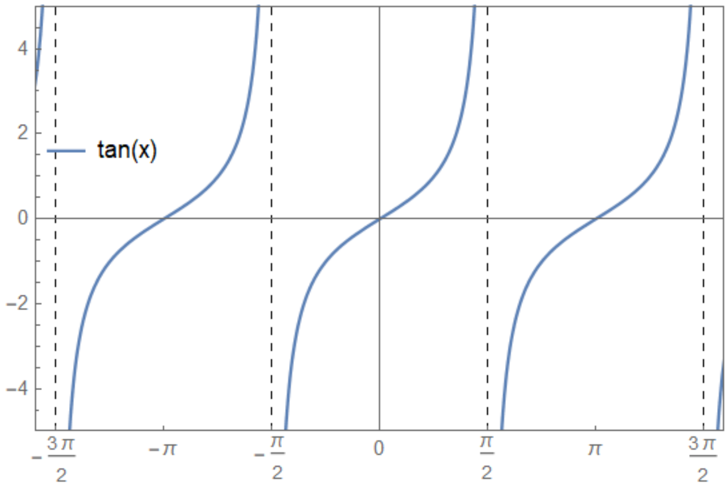
אלגברית, סדר הפעולות למציאת פונקציה הופכית הוא

1. פותרים את המשוואה $y=f(x)$ עבור x במונחים של y (מבודדים את x).

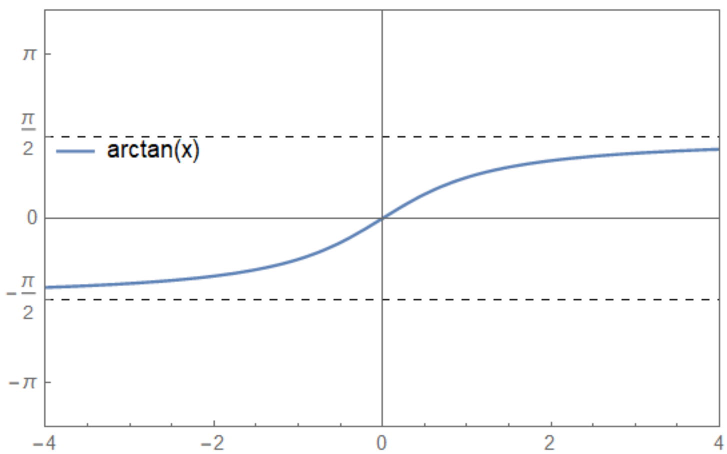
2. מחליפים בין x ל-y. המשוואה שתתקבל תהיה $y=f^{-1}(x)$.

דוגמא

הפונקציה $\tan(x)$
תחום ההגדרה: $-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n<x<\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n$
טווח ההגדרה: $-\infty<\tan(x)<\infty$



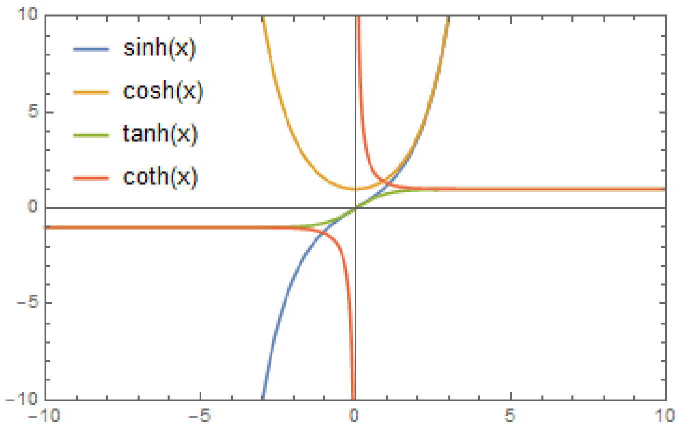
הפונקציה ההופכית $\arctan(x)$
תחום ההגדרה: $-\infty < x < \infty$
טווח ההגדרה: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$



פונקציות היפרבוליות

הפונקציות ההיפרבוליות מוגדרות באופן הבא:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



ישנם הרבה זהויות היפרבוליות שניתן להוכיח, למשל:

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$$
$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$$

דוגמא

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} =$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

תרגיל 4

מצאו את הפונקציה ההופכית של

$$\sinh(x)$$

פתרון

נסמן $y = \sinh(x)$

$$e^x = \sinh(x) + \cosh(x)$$
$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$$
$$x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

מכאן הפונקציה ההפוכה הינה:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

נגזרות

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 תסומן $f'(x_0)$, והיא הגבול $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אם הגבול קיים אז הפונקציה נקראת גזירה בנקודה x_0 . סימון נוסף לנגזרת הוא $\frac{df}{dx} = f'(x)$.
עבור x כללי נכתוב

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

מתקיימות התכונות הבאות :

$$\frac{d}{dx}\left(cf\left(x\right)\right) = cf'\left(x\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = f'\left(x\right) + g'\left(x\right)$$

כלל המכפלה :

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right) g\left(x\right)\right) = f'\left(x\right) g\left(x\right) + f\left(x\right) g'\left(x\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right) = \frac{f'\left(x\right) g\left(x\right) - f\left(x\right) g'\left(x\right)}{\left(g\left(x\right)\right)^2}$$

תרגיל 5

חשבו על פי הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה

$$f(x) = 5x^3 + 4x$$

פתרון

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{5(x+\Delta x)^3 + 4(x+\Delta x) - 5x^3 - 4x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{5\left(x^3 + \Delta x^3 + 3x^2\Delta x + 3(\Delta x)^2 x\right) + 4(x+\Delta x) - 5x^3 - 4x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{15x^2\Delta x + 15(\Delta x)^2 x + 5(\Delta x)^3 + 4\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 15x^2 + 15x\Delta x + 5\Delta x^2 + 4 = 15x^2 + 4 \end{aligned}$$