<u>אסטרונומיה כללית - תרגול 1</u>

מתרגל: עידו אופיר

תוכן עניינים

1. קרינה גוף שחור וכוכבים

1.1 מבוא קרינת גוף שחור

גוף שחור אידיאלי בולע באופן מושלם קרינה אלקטרומגנטית בכל אורכי הגל ללא החזרה או העברה, ופולט קרינה כך שהיא תלויה רק בטמפרטורה שלו. הקרינה שהוא פולט היא קרינת גוף שחור ונשתמש בה לתיאור הקרינה הנפלטת מגופים חמים. בקורס זה, בקירוב גס אבל מאוד יעיל, נתייחס לכוכבים כאשר הם פולטים ספקטרום קרינה שדומה לגוף שחור.

גופים הנמצאים בשיווי משקל תרמודינמי (בין קרינה וחומר) כלומר הטמפרטורה בהם אחידה וקבועה יחסית, מסוגלים לבלוע באופן "מושלם" את הקרינה שנופלת עליהם ולכן הם פולטים ספקטרום של גוף שחור.

1.2 קרינת גוף שחור

צפיפות האנרגיה של קרינת גוף שחור (לתדירות מסוימת):

$$U_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \qquad [U_\nu] = \frac{erg}{cm^3 \cdot H_z} \tag{1}$$

כאשר ν התדירות, h קבוע פלנק, k קבוע בולצמן, T הטמפ' בקלווין.

עוצמת הקרינה ניתנת ע"י נגזרת של צפיפות האנרגיה לפי זווית מרחבית והכפלה במהירות האור:

$$I_\nu = c\frac{du_\nu}{d\Omega} \tag{2}$$

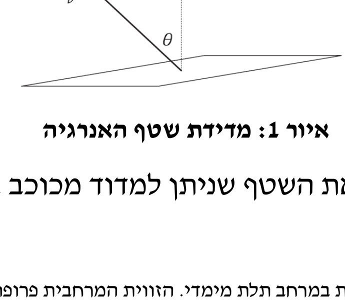
(כמות השטף שעובר ליחידת שטח ליחידת זמן)

אם נניח כי קרינת הגוף השחור היא איזוטרופית אז $\frac{du_\nu}{d\Omega} = \frac{u_\nu}{4\pi}$ (מקבלים 4π $steradian$[1] עבור ספירה)

לבסוף, עוצמת קרינת הגוף השחור (*Blackbody Radiation Intensity*) היא:

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi}u_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = B_\nu, \qquad [I_\nu] = [B_\nu] = \frac{erg}{s\cdot(cm)^2\cdot Hz\cdot steradian} \tag{3}$$

כעת נרצה לחשב את שטף האנרגיה. שטף האנרגיה זהו השטף הנפלט בזווית θ למישור, ליחידת שטח (יחידת שטח קטנה מאוד היכולה להיחשב כשטוחה) מהמשטח של הגוף השחור.



איור 1: מדידת שטף האנרגיה

נקבל את נוסחת פלאנק אשר מתארת את השטף שניתן למדוד מכוכב או ממקורות אסטרונומים אחרים:

---

[1] סטרדיאן - יחידת מידה לזווית במרחב תלת מימדי. הזווית המרחבית פרופורציונלית לשטח שהיא מכסה מפני השטח של הכדור.

$$f_\nu = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} I_\nu cos\theta sin\theta d\theta d\phi = I_\nu 2\pi\frac{1}{2} = \pi I_\nu = \frac{c}{4}u_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \quad [f_\nu] = \frac{erg}{s\cdot cm^2\cdot Hz} \tag{4}$$

נגדיר גודל חדש המתאר את העוצמה המרבית (האנרגיה ליחידת זמן) שנפלטת איזוטרופית מכוכב ספירי עם רדיוס $r_\star$. גודל זה מכונה נוהר (*Luminosity*) והוא מחושב על ידי:

$$L_\nu = f_\nu(r_\star)4\pi r_\star^2, \qquad [L_\nu] = \frac{erg}{s\cdot Hz} \tag{5}$$

והשטף שנמדד על ידי צופה במרחק d מהכוכב הוא:

$$f_\nu(d) = \frac{L_\nu}{4\pi d^2} = f_\nu(r_\star)\frac{r_\star^2}{d^2} \tag{6}$$

כאן $f_\nu(r_*)$ הוא השטף הנמדד על פני הכוכב, r_* הוא הרדיוס של הכוכב, $f_\nu(d)$ הוא השטף הנמדד ע"י הצופה ו - d הוא המרחק בין הכוכב לצופה.

כל הגדלים שהגדרנו הם ספציפיים עבור תדירות ν. בכל שלב, ניתן לבצע אינטגרציה על התדירויות ולקבל:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu\,, \qquad I = \int_0^\infty I_\nu d\nu\,, \qquad f = \int_0^\infty f_\nu d\nu\,, \qquad L = \int_0^\infty L_\nu d\nu \tag{7}$$

1.3 חוק סטפן בולצמן והקשר לנוהר

חוק סטפן בולצמן מקשר בין צפיפות האנרגיה/שטף שנמדד מגוף מסוים לטמפרטורה שלו (טמפרטורה של גוף שחור) כאשר הטמפרטורה היא זו הנמדדת על הפוטוספרה – פני הכוכב, והשטף הוא השטף הנמדד על פני הכוכב).

$$U = aT^4, \qquad f_\nu(r_*) = \frac{c}{4}aT^4 = \sigma T^4$$
$$a = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3} = 7.6\cdot 10^{-15}\ \frac{erg}{cm^3K^4}, \qquad \sigma = \frac{c}{4}a = 5.7\cdot 10^{-5}\frac{erg}{s\cdot cm^2K^4} \tag{8}$$

(הקבועים מופיעים בדף הנוסחאות של הקורס)

בעזרת חוק סטפן בולצמן נוכל לרשום קשר בין הנוהר לטמפרטורה:

$$L_\nu = f_\nu(r_*)4\pi r_*^2 = f_\nu(d)4\pi d^2 = 4\pi r_*^2\sigma T^4 \tag{9}$$

1.4 ספקטרום הקרינה

במקום לדבר על צפיפות אנרגיה, עוצמה, שטף ונוהר כפונקציה של התדירות, ניתן גם לחשב את הגדלים כפונקציה של אורך גל כאשר הקשר הוא $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

ניתן להסתכל על ספקטרום הקרינה של הגוף השחור כפונקציה הן של אורך הגל והן של התדירות ואז נקבל $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$:

$$B_\lambda = B_\nu \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = B_\nu \frac{c}{\lambda^2} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}, \quad (10)$$

$$[B_\nu] = \frac{erg}{s \cdot (cm)^2 \cdot cm \cdot Hz \cdot steradian}$$

הפרדנו את $(cm)^2 \cdot cm$ כי אחד הוא ליחידת שטח שדרכה עובר השטף והשנייה עבור אורך הגל. (בדרך כלל נמדוד את אורכי הגל ביחידת המידה Å).

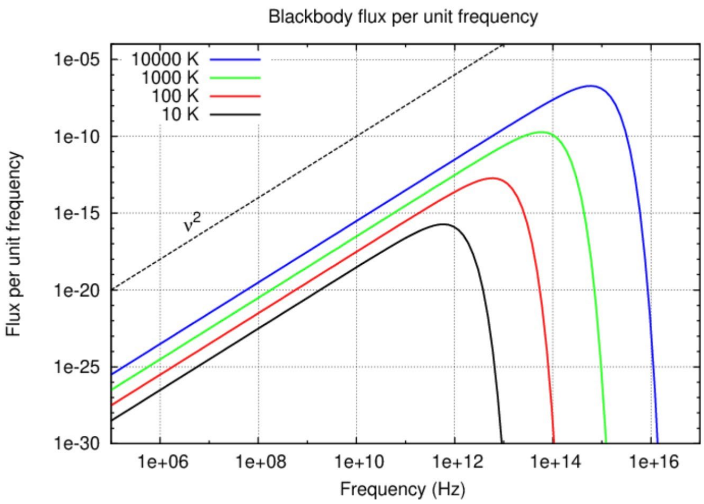
הספקטרום מקסימלי מתקבל כאשר לוקחים את הנגזרות ומשווים לאפס. כלומר, באורך הגל $\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0$ או בתדירות $\frac{dB_\nu}{d\nu} = 0$. מכאן מקבלים את חוק ווין - *Wien's law* - קו ישר המחבר את אורכי הגל המקסימליים:

$$\lambda_{max} T = 0.0029 \ \ m \cdot K \quad (11)$$

לפעמים רושמים ($\lambda_{max} T = \alpha, \ h\nu_{max} = 2.8 \ k_B T$) כאשר λ_{max} הוא אורך הגל בו נפלטת האנרגיה בעוצמה הרבה ביותר, ו - $\alpha = 0.29 \ cm \cdot K$. בדיאגרמת הרצשפרונג-ראסל. החוק מסביר מדוע כוכבים חמים זוהרים בכחול (בעלי אורך גל קצר יותר), וכוכבים קרים זוהרים באדום (בעלי אורך גל ארוך יותר.

נשים לב כי $\lambda_{max} \neq \frac{c}{\nu_{max}}$. ההתפלגויות הן שונות בגלל שהאינטגרל מתנהג בצורה שונה $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2}$.

כאשר מסתכלים על השטף, נבחין כי כל פונקציה f_ν כזו היא עבור טמפרטורה מסוימת:



איור 2: השטף הנמדד בטמפרטורות שונות כתלות בתדירות

ככל שאנו מתרחקים מ - λ_{max}/ν_{max} ספקטרום פלאנק עבור גוף שחור מקבל צורה פשוטה יותר.

על מנת להבין את התנהגות הגרף, נסתכל על הגבולות עבור ספקטרום הקרינה של גוף שחור שראינו במשוואה (3) $B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$.

בגבול $h\nu \ll k_B T$, *Rayleigh - jeans*, מקבלים :

$$B_\lambda \approx \frac{2ck_BT}{\lambda^4}, \qquad B_\nu \approx \frac{2\nu^2}{c^2}k_BT \tag{12}$$

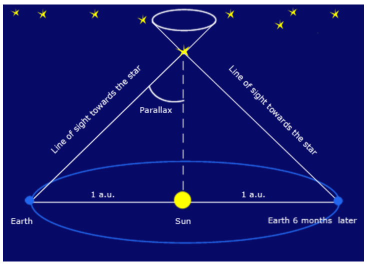
בגבול $h\nu \gg k_B T$, *Wein tail*, מקבלים נפילה אקספוננציאלית (*Wein tail of the distribution*) :

$$B_\lambda \approx e^{-\frac{hc}{\lambda k_BT}}, \qquad B_\nu \approx e^{-\frac{h\nu}{k_BT}} \tag{13}$$

2. פרמטרים אסטרונומים

2.1 פרלקסה, טמפרטורה וצבע

מרחק: עבור כוכבים "קרובים" ניתן למדוד את המרחק באמצעות פרלקסה:



איור 3: מציאת הפרלקסה

$$\alpha \sim \frac{d_\odot}{d} = \frac{1}{d} \qquad \{d_\odot = 1\,AU\} \tag{14}$$

כאשר $d_\odot$ הוא מרחק של כדור הארץ מהשמש ו- d הוא המרחק לכוכב.

באמצעות פרלקסה נוכל להגדיר את יחידת המידה PC (פארסק) בה נשתמש בקורס. פארסק היא יחידת האורך שפרלקסה שווה לשניית קשת אחת (שניית קשת $\frac{1}{3600}$ של המעלה).

$$1\,PC\,\{parsec\} = \frac{1\,AU}{\tan\left(\frac{1}{3600}\right)} = 2.1 \cdot 10^5\,AU = 3.1 \cdot 10^{18} cm = 3.3\,ly \tag{15}$$

חישוב זה מתייחס לכוכב שמרחקו מהשמש הוא פארסק אחד, כאשר יש פרלקסה של שניית קשת אחת בין הקו המחבר בין הכוכב לכדור הארץ לקו המחבר בין הכוכב לשמש.

בפרלקסה ניתן להשתמש רק עבור כוכבים קרובים יחסית.

טמפרטורה: הספקטרום הנפלט מכוכב נקבע על פי הטמפרטורה על הפוטוספרה. פוטוספרה - פני הכוכב שם יכולים הפוטונים לברוח ללא התנגשות או בליעה (לכן מתייחסים לזה כגוף שחור).

צבע: יחס השטפים באורכי גל שונים למשל: $\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}$. פה אנחנו מתאימים את פונקציית פלאנק עבור שני אורכי גל שונים. לפי היחס נוכל למצוא את הטמפרטורה כי נוכל להעריך לאיזה גוף שחור היחס הזה מתאים.

3. תרגילים

3.1 תרגיל 1

א. השמש תופסת זווית Ω בשמיים והשטף הכולל קרוב לכדור הארץ הוא $f\left(d_{\odot}\right)$. הראו שהשטף על שפת השמש שווה ל - $\frac{\pi f(d_{\odot})}{\Omega}$.

ב. קוטר השמש הזוויתי הוא $0.57°$. חשבו את הזווית המרחבית של השמש בסטרדיאן.

ג. נתון: $f\left(d_{\odot}\right) = 1.4 \times 10^{6} \frac{erg}{s \cdot cm^{2}}$. מצאו את הטמפרטורה האפקטיבית T_E של פני השמש.

ד. מצאו ביטוי לטמפרטורה של פני השמש כפונקציה של שטף השמש באמצעות: $\lambda_1, \ \ f_{\lambda}(\lambda_1)$.

3.2 תרגיל 2

א. במידה ונתון הצבע (יחס השטפים) מכוכב - $\frac{f(\nu_1)}{f(\nu_2)}$ בתדירויות ν_1, ν_2 הראו שניתן להסיק את הטמפרטורה של פני הכוכב.

ב. הסבירו מדוע יהיה קשה למדוד את הטמפרטורה אם התדירויות הם באזור $Rayleigh - jeans$.

ג. מצאו ביטוי פשוט לטמפרטורה באזור *Wein tail* כפונקציה של $\lambda_i, \ \ f(\lambda_i)$.

ד. אם בנוסף לתוצאה בסעיף ג' נתונה גם זווית הפרלקסה והשטף הכולל (עבור כל אורכי הגל) בכדוה"א, מצאו ביטוי לרדיוס הכוכב $r_{\star}$.

3.3 תרגיל 3

אם פרלקסה ניתנת למדידה בדיוק של $0.01 \ arcsec$ וצפיפות הכוכבים בסביבה היא $0.1 \ pc^{-3}$, עבור כמה כוכבים נוכל למדוד את המרחק?