אינטגרלים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

האינטגרל המסוים

האינטגרל המסוים של פונקציה $f(x)$ בין נקודה $x=a$ לנקודה $x=b$ מוגדר להיות הסכום[1]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum f(x)\Delta x \tag{1}$$

כאשר מחלקים את המקטע $[a,b]$ לתת־מקטעים שגודלם $\Delta x\to 0$, $f(x)$ הוא ערך הפונקציה בתוך תת־מקטע נתון,[2] והסכום הוא על כל התת־מקטעים. בצורה יותר ספציפית נוכל לרשום את האינטגרל כ־

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{2}$$

כאשר המקטע $[a,b]$ מחולק ל־n תת־מקטעים קטנים בגודל

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{3}$$

ובכל מקטע נבחרת נקודה x_i שבה מעריכים את $f(x_i)$. בגבול $n\to\infty$ התוצאה שואפת למספר שאינו תלוי ב־n או בבחירה המדויקת של x_i.

הפונקציה $f(x)$ נקראת **האינטגרנד** והפרמטרים a ו־ b נקראים **גבולות האינטגרציה**.

עבור המקרה הפשוט של $f(x)=1$ נקבל

$$\int_a^b dx = b-a \tag{4}$$

במילים: סכום האורכים של התת־מקטעים שווה לאורך המקטע.

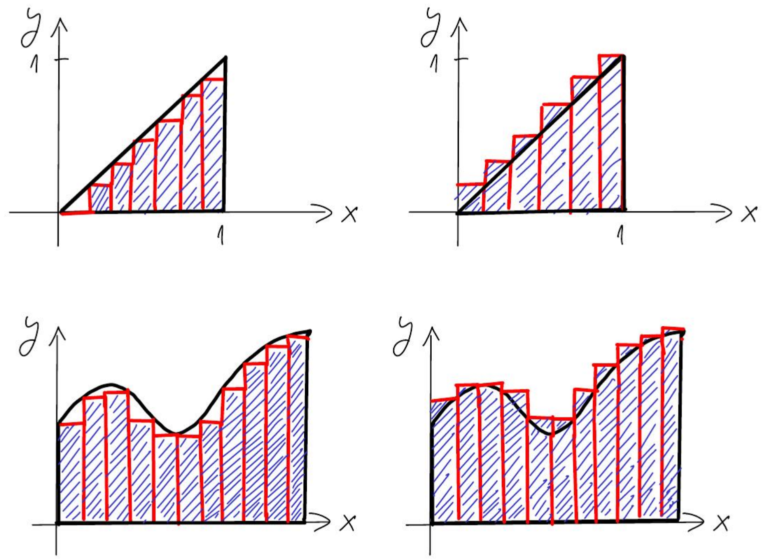
אם מציירים את **גרף הפונקציה**, האינטגרל הוא השטח הכלוא בין הפונקציה לבין ציר ה־x, כי שטח זה מורכב משטחים של n מלבנים ששטחיהם $f(x_i)\Delta x$. (בקטעים שבהם הפונקציה שלילית, התרומה לאינטגרל היא מינוס השטח.)

---

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

[1] לפעמים רושמים $\int_a^b dx\, f(x)$ במקום $\int_a^b f(x)\,dx$. אין הבדל במשמעות.

[2] בגבול שבו התת־מקטע קטן, $f(x)$ לא משתנה לאורכו בצורה משמעותית ולכן לא משנה באיזו נקודה בתוך התת־המקטע נחשב אותו.



איור 1: סכום רימן העליון (ימין) והתחתון (שמאל) עבור הדוגמה שבטקסט (למעלה) ופונקציה נוספת (למטה).

דוגמה:
ניקח פונקציה פשוטה $f(x) = x$ ונרצה לחשב את השטח בין הפונקציה וציר ה־x במקטע $[0,1]$. ברור שזהו שטח משולש וערכו $1/2$. נראה איך זה מתקבל מהגדרת האינטגרל המסוים. נחלק את המקטע ל־n מקטעים באורך $\Delta x = 1/n$, ובכל מקטע נבחר את ערך הפונקציה הגבוה ביותר במקטע:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{n}}_{\text{height}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{width}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \tag{5}$$

כעת נחזור על התרגיל, אך נבחר את ערך הפונקציה הנמוך ביותר במקטע:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i-1}{n}}_{\text{height}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{width}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \tag{6}$$

כעת, לכל n אנו יודעים שערך האינטגרל (כלומר השטח) חסום בין הערך במשוואה (6) לבין הערך במשוואה (5). הסכומים נקראים בהתאמה **סכום רימן התחתון** ו**העליון**. בגבול $n \to \infty$ שניהם שואפים לערך האינטגרל, $1/2$.

האינטגרל הלא מסוים

האינטגרל הלא מסוים מוגדר כ־

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{7}$$

כאשר הפונקציה $F(x)$ מקיימת

$$F'(x) = f(x) \tag{8}$$

$F(x)$ נקראת **הפונקציה הקדומה** של $f(x)$, והיא מוגדרת עד כדי הוספת קבוע. במילים פשוטות, האינטגרל הלא מסוים הוא היפוך של נגזרת (חוץ מקבוע שהמידע לגביו אובד בגזירה).

דוגמה:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{9}$$

דוגמה:

$$x > 0: \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \tag{10}$$

$$x < 0: \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \tag{11}$$

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

מתקיים הקשר הבא בין האינטגרל המסוים (סכום / חישוב שטח) והלא מסוים (היפוך גזירה):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b \tag{12}$$

דוגמה:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a \tag{13}$$

הוכחת המשפט:

נגדיר

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{14}$$

כאשר הסימון מצד ימין מציין חישוב שטח במקטע $[a,x]$. כעת נגזור:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}G(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} && (15)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{\Delta x} && (16)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} && (17)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\int_x^{x+\Delta x} dt}{\Delta x} && (18)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} && (19)\\
&= f(x) && (20)
\end{aligned}$$

המעבר משורה (16) לשורה הבאה התבצע בהסתמך על תמונת השטח: השטח בין ציר ה־x לפונקציה $f(x)$ במקטע $[a,x+\Delta x]$ פחות השטח במקטע $[a,x]$ שווה לשטח במקטע $[x,x+\Delta x]$. המעבר משורה (17) לשורה הבאה אפשרי כי עבור Δx מספיק קטן ערך הפונקציה $f(t)$ הוא בקירוב קבוע בתוך התחום שבין x ל־$x+\Delta x$ כך שניתן להוציא אותו החוצה כ־$f(x)$. כעת הראינו שהנגזרת של $G(x)$ היא $f(x)$, כלומר $G(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ וניתן לסמנה $F(x)$. אם כך,

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt \qquad (21)$$

והוכחנו את המשפט.

אינטגרציה בחלקים

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx \qquad (22)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) && (23)\\
\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx &= \int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx && (24)
\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\begin{aligned}
\int f(x)g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx-\int f'(x)g(x)dx && (25)\\
&= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx && (26)
\end{aligned}$$

עבור האינטגרלים המסוימים מקבלים

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{27}$$

דוגמה:

$$I = \int x\,e^x dx \ = ? \tag{28}$$

נחשוב על האינטגרנד בתור $f(x)g'(x)$, כאשר

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^x \tag{29}$$

זה אומר ש־

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = e^x \tag{30}$$

אז מקבלים

$$I = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{31}$$

$$= xe^x - \int e^x dx \tag{32}$$

$$= xe^x - e^x + C \tag{33}$$

דוגמה:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \, \sin x \, dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\,(-\cos x)\,dx \tag{34}$$

$$= 0 - 0 + 2\int_0^{\pi/2} x \, \cos x \, dx \tag{35}$$

$$= 2\left[x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx\right] \tag{36}$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2}\right] \tag{37}$$

$$= \pi - 2 \tag{38}$$

אינטגרציה באמצעות הצבה

דוגמה: כדי לחשב את האינטגרל

$$\int \sin^2 x \, \cos^3 x \, dx \tag{39}$$

נעבור ממשתנה x למשתנה u שנגדיר להיות

$$u = \sin x \tag{40}$$

נוכל לרשום באמצעות u גם פקטורים של $\cos x$ ע"י השימוש בקשר

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2 \tag{41}$$

על מנת לרשום את האינטגרל במונחים של u אנחנו צריכים להביע גם את dx באמצעות u. כדי לעשות זאת, נחשב

$$du = \frac{du}{dx}\,dx = \cos x\,dx \tag{42}$$

אז נוכל לרשום את האינטגרל כ־

$$\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx = \int u^2\left(1-u^2\right)du \tag{43}$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \tag{44}$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \tag{45}$$

כאשר בשלב האחרון ביטאנו את התוצאה במונחים של המשתנה המקורי x.

במקרה של אינטגרל מסוים, היינו יכולים להחליף את גבולות האינטגרציה יחד עם שינוי המשתנה ואז לא היינו צריכים לחזור למשתנה המקורי. לדוגמה:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx = \int_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du \tag{46}$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \tag{47}$$

$$= \frac{2}{15} \tag{48}$$

כשלקחנו בחשבון שכאשר x משתנה בין 0 ל־$\pi/2$, u משתנה בין 0 ל־1.

תיאור שיטת ההצבה בצורה כללית

מתקיים הקשר

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \tag{49}$$

ניתן להבין זאת בקלות אם רושמים

$$g'(x)\,dx = \frac{dg}{dx}\,dx = dg \tag{50}$$

במילים אחרות, אנחנו עוברים כאן מרישום האינטגרל במונחים של המשתנה x לרישום במונחים של משתנה חדש u הנתון ע"י $u = g(x)$ ולוקחים בחשבון ש־

$$du = g'(x)\,dx \tag{51}$$

כפי שנובע מהגדרת הנגזרת $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, ושתחום האינטגרציה משתנה מ־$[a,b]$ ל־$[g(a), g(b)]$.

הערה: ניזכר שהאינטגרל מוגדר במונחים של מקטעים Δx שאורכם כמובן חיובי, וכך צריך להיות גם כשנרצה לרשום את האינטגרל במונחים של Δu. כדי שזה יתקיים גם כאשר $g'(x) < 0$ צריך בעיקרון לכתוב $du = |g'(x)|\,dx$, עם הערך המוחלט. אבל יחד עם זאת, עבור קטע שבו $g'(x) < 0$ נקבל $g(a) > g(b)$, ואז האינטגרציה אמורה להיות מ־$g(b)$ ל־$g(a)$ ולא להיפך. נוכל אם כן להימנע מרישום הערך המוחלט אם נגדיר שאינטגרל שבו הגבול התחתון גדול מהגבול העליון קשור לאינטגרל הסטנדרטי ע"י

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{52}$$

דוגמה: נחשב את האינטגרל

$$I = \int dx\,\sqrt{1-x^2} \tag{53}$$

כאן ניתן לעשות את ההצבה $x = \sin\theta$, שעבורה $dx = \cos\theta\,d\theta$:

$$I = \int d\theta\cos\theta\,\sqrt{1-\sin^2\theta} \tag{54}$$

$$= \int \cos^2\theta\,d\theta \tag{55}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta \tag{56}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\,\sqrt{1-x^2}\right) + C \tag{59}$$

כאשר הנחנו שלכל ערך של x בתחום האינטגרציה, אשר חייב להיות מוכל בתחום $-1 \le x \le 1$, אנחנו מתאימים זווית θ מהתחום $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, כך ש־$\cos\theta \ge 0$.

דוגמה: נחשב את האינטגרל

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} \tag{60}$$

אינטגרלים של פונקציות רציונליות (=יחס של פולינומים) של $\sin x$ ו־$\cos x$, כמו האינטגרל הנ"ל, ניתנים לפישוט ע"י **הצבה טריגונומטרית אוניברסלית**:

$$t = \tan\frac{x}{2} \tag{61}$$

עם הצבה זו, $\sin x$ ו־$\cos x$ נתונים על־ידי

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{62}$$

כמו־כן, ע"י גזירה של $x = 2\arctan t$, מקבלים

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \tag{63}$$

ואז יש לנו את כל מה שצריך כדי לרשום אינטגרלים של פונקציות של $\sin x$ ו־$\cos x$ במונחים של t. עבור האינטגרל לעיל מקבלים

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t+1} \tag{64}$$

$$= \ln(t+1) + C = \ln\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right) + C \tag{65}$$

האינטגרל הסופי כאן יצא פשוט במיוחד כי איברי ה־t^2 במכנה הצטמצמו. זה קרה במקרה. בדרך כלל נקבל אינטגרל מסובך יותר. לדוגמה אם נשנה את הסימן לפני ה־$\cos x$ נקבל

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t^2+t} \tag{66}$$

איך נפתור אינטגרל כזה? נוכל לעשות זאת באמצעות השיטה הבאה.

אינטגרציה ע"י פירוק לשברים חלקיים

דוגמה:

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x} \tag{67}$$

נשים לב שניתן לרשום

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \tag{68}$$

ונקבל

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \tag{69}$$

$$= \ln x - \ln(x+1) + C \tag{70}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C \tag{71}$$

לחלופין, ניתן לפשט את האינטגרל ע"י השלמה לריבוע:

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{du}{u^2 - \frac{1}{4}} \tag{72}$$

$$= \ln\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right) + C = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C \tag{73}$$

כאשר אחרי ההשלמה לריבוע השתמשנו בהצבה $u = x + \frac{1}{2}$ ולאחר מכן בנוסחה

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \tag{74}$$

שנמצאת בדפי הנוסחאות. ניתן להוכיח אותה ע"י פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \tag{75}$$