מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 3

נגזרות

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 תסומן $f'(x_0)$, והיא הגבול $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אם הגבול קיים אז הפונקציה נקראת גזירה בנקודה x_0 . סימון נוסף לנגזרת הוא $\frac{df}{dx} = f'(x)$.
עבור x כללי נכתוב

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

מתקיימות התכונות הבאות :

$$\frac{d}{dx}\left(cf(x)\right) = cf'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) = f'(x)+g'(x)$$

כלל המכפלה :

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

עבור הרכבה של פונקציות מתקיים כלל השרשרת

$$\frac{d}{dx}\left[(f\circ g)(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = \frac{d}{dg(x)}f(g(x))\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

בתנאי ש- g גזירה ב- x ו- f גזירה ב- $g(x)$.
נגזרת הפונקציה ההופכית היא

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_{x=b} = \frac{1}{\frac{df}{dx}|_{x=f^{-1}(b)}}$$

הוכחה :

$$\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(x)\right) &= x\\
\frac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right] &= 1\\
f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= 1\\
\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}
\end{aligned}$$

תרגיל 1

חשבו על פי הגדרת הנגזרת את נגזרת הפונקציה

$$f(x) = e^x$$

פתרון

נמצא את:

$$(e^x)'$$

נסמן:

$$y = e^x$$

$$\ln y = x$$

$$y' \left(\ln y\right)' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\left(\ln y\right)'}$$

לכן נמצא את הנגזרת של פונקציית ה-ln על פי הגדרה:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\ln(y+\Delta y) - \ln(y)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)}{\Delta y} = \frac{1}{y} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)}{\Delta y / y} \\
&= \frac{1}{y} \lim_{\Delta y \to 0} \ln\left[\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{y}{\Delta y}}\right] = \frac{1}{y} \ln \lim_{\Delta y \to 0} \left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{y}{\Delta y}} \\
&= \left\{\frac{y}{\Delta y} = n\right\} = \frac{1}{y} \ln \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{y} \ln e = \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

מכאן:

$$y' = \frac{1}{\left(\ln y\right)'} = y$$

וקיבלנו כי:

$$(e^x)' = e^x$$

תרגיל 2

חשבו את הנגזרת של הפונקציה:

$$g\left(x\right)=\arctan\left(x\right)$$

פתרון

נסמן $f(x)=\tan x$ ו-$g(x)=f^{-1}(x)$
נזכור ש:

$$\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{\cos\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}+\frac{\sin^{2}\left(x\right)}{\cos^{2}\left(x\right)}=1+\tan^{2}\left(x\right)$$

ונקבל:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x)=\frac{1}{1+\tan^{2}(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^{2}}$$

הקירוב הליניארי

כאשר אנחנו מתבוננים בנגזרת של פונקציה בנקודה מסויימת אנחנו יכולים להעריך שקרוב מאוד לאותה נקודה הנגזרת לא תשתנה הרבה ולכן לקרב את הפוקנציה לקו ישר שהשיפוע שלו הוא הנגזרת בנקודה הראשונית.

$$f\left(x\right)\approx f\left(x_{0}\right)+f'\left(x_{0}\right)\left(x-x_{0}\right)$$

דוגמא

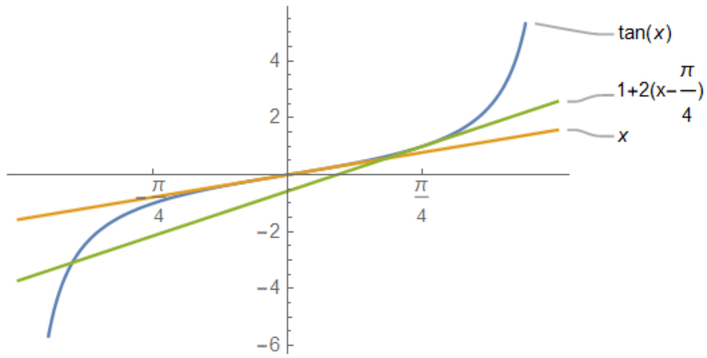
הפונקציה $\tan(x)$ סביב $x_{0}=0$

$$\frac{d}{dx}\tan\left(x\right)=\frac{1}{\cos^{2}\left(x\right)}$$

$$\tan\left(x\right)\approx\tan\left(0\right)+\frac{1}{\cos^{2}\left(0\right)}x=x$$

סביב $x_{0}=\frac{\pi}{4}$:

$$\tan\left(x\right)\approx\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\cos^{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$



טור טיילור

ניתן לכתוב כל פונקציה כפולינום סביב נקודה נבחרת, נבחר את הפולינום $P\left(x;x_0\right)$ כך שבנקודה הנבחרת, x_0, הוא, וכל הנגזרות שלו, יהיו שווים בדיוק לפונקציה שלנו ולנגזרות שלה. במצב הזה גם קרוב לנקודה הנבחרת הפולינום יהיה שווה לפונקציה, אם ניקח אינסוף איברים, ואם ניקח רק מספר סופי של איברים הוא יהיה שווה לפונקציה בקירוב. בדרך כלל מספר קטן של איברים כבר יהיה מספיק קרוב כך שההפרש יהיה זניח. סביב הנקודה x_0:

$$P\left(x;x_0\right)=a_0\left(x_0\right)+a_1\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+a_2\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+a_3\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^3+...=f\left(x\right)$$

$$P\left(x_0;x_0\right)=a_0\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

$$P'\left(x_0;x_0\right)=a_1\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$$

$$P''\left(x_0;x_0\right)=2a_2\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)\rightarrow a_2\left(x_0\right)=\frac{f''\left(x_0\right)}{2}$$

$$P'''\left(x_0;x_0\right)=2\cdot 3a_3\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)\rightarrow a_3\left(x_0\right)=\frac{f''\left(x_0\right)}{3!}$$

ובאופן כללי:

$$a_n\left(x_0\right)=\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$$

כלומר:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

דוגמא - נוסחת אוילר

נפתח את הפונקציה e^{ix} סביב $x_0=0$

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}x^n=$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = \cos(x) + i\sin(x)$$

ומכאן:

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

מכאן נקבל את זהות אוילר:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

וכן נוכל להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת אקספוננטים:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

תרגיל 3

פתחו לטור טיילור את הפונקציה $\ln(1+x)$ סביב הנקודה $x_0 = 0$ עד סדר כללי

פתרון

נחשב את המקדמים של הטור:

$$f(x)|_{x=0} = \ln(1+x)|_{x=0} = 0$$

$$f^{(1)}(x)|_{x=0} = \frac{1}{1+x}|_{x=0} = 1$$

$$f^{(2)}(x)|_{x=0} = -\frac{1}{(1+x)^2}|_{x=0} = -1$$

$$f^{(3)}(x)|_{x=0} = \frac{2}{(1+x)^3}|_{x=0} = 2$$

$$f^{(4)}(x)|_{x=0} = -\frac{3!}{(1+x)^4}|_{x=0} = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)\,|_{x=0} = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}|_{x=0} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!$$

כלומר :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

נוסחת השארית

טור טיילור שווה במדוייק לפונקציה שהוא מקרב רק עבור אינסוף איברים.
אם ניקח רק מספר איברים סופי ישאר לנו הפרש בין סכום הטור לפונקציה עצמה, זוהי השארית של טור טיילור.
השארית של טור טיילור מסדר n של פונקציה, R_n היא ההפרש בין ערך הפונקציה לבין ערכו של סכום n הרכיבים הראשונים בטור טיילור שלה :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

כאשר הפונקציה $f(x)$ ניתנת לגזירה $n+1$ פעמים, ניתן לחשב את השארית בעזרת הנוסחה הבאה :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

עבור c כלשהו הנמצא בקטע $c \in [x_0, x]$.
לסיכום : טור טיילור הינו סכום של פולינומים ממעלה n ושארית ממעלה $n+1$, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. במקרים רבים ניתן להעריך את השגיאה ללא ידיעה מפורשת של הערך c.

תרגיל 4

חשבו את הערך של e עד לשגיאה של 0.01 בעזרת נוסחת השארית

פתרון

טור טיילור של אקספוננט סביב אפס הינו :

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

והשארית שלו :

$$R_n(x) = e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

אנו מעוניינים במקרה בו $x = 1$:

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 0.01$$

$$300 \leq (n+1)!$$

$$\rightarrow n = 5$$

מכאן שעבור הקירוב המבוקש עלינו להגיע עד לסדר חמישי בטור (שישה איברים):

$$e^1 = e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2 + \frac{86}{120} \approx 2.7167$$

בעוד הערך המדוייק של e הוא:

$$e = 2.7182...$$

תרגיל 5

חשבו בעזרת טור טיילור את הביטוי הבא עד סדר שני ב x.

$$\sqrt{1 + 2\sin(x)}$$

פתרון

נפתח את הפונקציה הנתונה לטור טיילור סביב הנקודה $x_0 = 0$.
נשתמש בשני טורי טיילור מוכרים,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}\left(x^7\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

כאשר הסימון $\mathcal{O}\left(x^n\right)$ מייצג איברים מסדר x^n ומעלה. אם כך,

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + 2\sin(x)} &= \sqrt{1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)} \\ &= 1 + \frac{2x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)}{2} - \frac{\left(2x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right)^2}{8} + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

בשלב הראשון החלפנו את $\sin x$ בטור הטיילור שלו, ולאחר מכן השתמשנו בעובדה שהביטוי $2x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right) \rightarrow 0$ כאשר $x \rightarrow 0$, אז ניתן להשתמש בטור של $\sqrt{1+x}$ ולהחליף את x ב-$2x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)$.