

אסטרונומיה כללית - תרגול 2

מתרגל: עידו אופיר

תוכן עניינים

2	1. סיווג כוכבים וקשרים בין פרמטרים אסטרונומיים.....
2	1.1 מבוא.....
2	1.2 דיאגרמת הרצפרונג - ראסל.....
3	1.3 כוכבי סדרה ראשית.....
3	1.4 משוואות עבור התפתחות כוכבים.....
4	1.5 גבול צ'נדראסקאר.....
5	2. מערכות בינאריות ומדידת מסה.....
5	2.1 סיווג מערכות בינאריות.....
5	2.2 מציאת מסת הכוכב במערכות בהן ניתן לראות את הכוכבים.....
6	2.2 Spectroscopic binaries מציאת מסת הכוכב במערכת.....
8	3. תרגילים.....
8	3.1 תרגיל 1.....
8	3.2 תרגיל 2.....

1. סיווג כוכבים וקשרים בין פרמטרים אסטרונומיים

1.1 מבוא

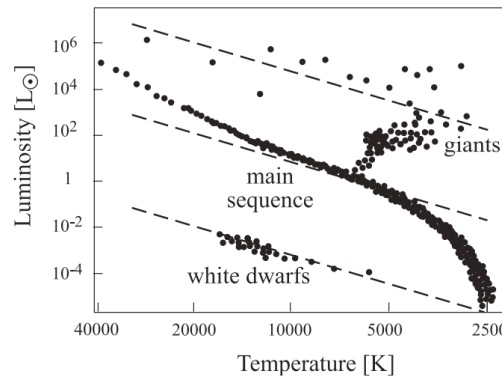
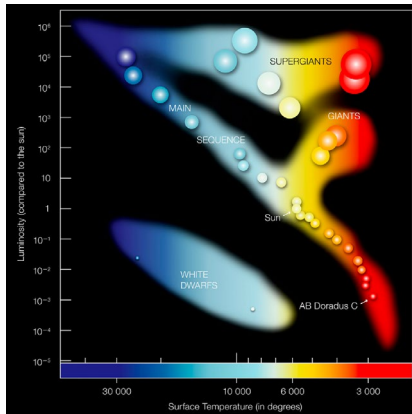
ניתן לקטלג את הכוכבים על ידי הסיווג ספקטרלי שלהם. במילים אחרות, ניתן לסווג את הכוכבים על פי ספקטרום הקרינה ועל פי עוצמת הקרינה. ספקטרום הקרינה הנפלטת מהכוכב הוא הספקטרום שראינו - קרינת גוף שחור התואמת לטמפרטורת הפוטוספירה (פני השטח של הכוכב). עוצמת הקרינה תלויה בשטח הפנים של הכוכב בהתאם לחוק סטפן בולצמן.

קטלוג הכוכבים ע"פ סוג ספקטרלי: *OBAFGKM*.

המעבר בין כל קבוצה לקבוצה רציף ולכן כל קבוצה כזו מחולקת ל - 10 רמות המסומנות בספרות 0-9.

1.2 דיאגרמת הרצפרונג - ראסל

דיאגרמת הרצפרונג - ראסל (*HR Diagram*): מתארת את בהירות הכוכבים אל מול הטמפרטורות שלהם על הפוטוספירה. את הטמפרטורה ניתן למדוד על ידי ספקטרוסקופיה. כאשר מסדרים את הכוכבים שבשמיים בדיאגרמה כזו ניתן לראות שרובם מסודרים לאורך עקומה שנקראת הסדרה הראשית.



איור 1: דיאגרמת הרצפרונג ראסל

הדיאגרמה משמשת להשוואת מודלים תאורטיים על התפתחות כוכבים. מיקום כוכב על התרשים תלוי במסה שלו בהיוולדו ובגיל שלו. לדוגמא, כוכב שמסתו ההתחלתית קטנה מ - 0.3 מסות שמש יכנס לדיאגרמה כננס אדום מסוג M . כוכב שמסתו קרובה למסת השמש (ננס צהוב) יתחיל את חייו גבוה יותר כסוג G . כוכבים כבדים יותר יתחילו גבוהה יותר בתרשים.

מאיור (1) ניתן לראות את מספר דברים:

- כ - 80%-90% מהכוכבים יושבים על רצועה צרה הנקראת הסדרה הראשית *the main sequence* כאשר טווח המסות על הסדרה הראשית נע בין 0.1-100 מסות שמש.
- ענקים אדומים - נמצאים ב"ענן" הימני העליון, יכולים להיות עם רדיוסים בסדר גודל של פי 100 משל השמש, כוכבים קרירים (לא חמים משמעותית) אך בעלי לומינוסיטי גבוהה.
- ננסים לבנים - נמצאים ב"ענן" השמאלי תחתון, כוכבים עם טמפרטורה גבוהה ועם לומינוסיטי נמוך. הרדיוס שלהם מאוד קטן - סדר גודל של 10^4 (מסדר גודל כדור"א). ננס לבן הוא גוף מאוד דחוס עם צפיפות חומר גבוהה. המסה של ננסים לבנים נעה בין $0.5 - 1.1 M_{\odot}$ כאשר המסה המקסימלית היא לא יותר מ - $1.4 M_{\odot}$.

1.3 כוכבי סדרה ראשית

הסדרה הראשית ניתנת בקירוב ע"י :

$$(1) \quad L \sim T_E^8$$

ורדיוס של כוכב בסדרה הראשית פרופורציונלי לטמפ' בריבוע.

$$(2) \quad r_* \sim T_E^2$$

מכאן משתמש שכוכב חם יותר הוא גם גדול יותר.

הבהירות של כוכב סדרה ראשית תלויה במסה ע"פ הנוסחה :

$$(3) \quad L \sim M^\alpha$$

כאשר $\alpha = 3$ עבור כוכבים יותר מסיביים מהשמש ו- $\alpha = 5$ עבור כוכבים קטנים מהשמש. באופן כללי, עבור כוכבי סדרה ראשית מגדירים $\alpha = 4$.

כעת, עבור כוכבי סדרה ראשית מתקיים הקשר :

$$(4) \quad r \sim M$$

כוכבים מאסיביים חיים פחות (מאבדים אנרגיה מהר יותר). זמן החיים של כוכבי סדרה ראשית :

$$(5) \quad t_{life} \propto M^{-3}$$

לסיכום : הסדרה הראשית זו בעצם סדרה של מסה. כוכבים מסיביים יותר הם בהירים יותר, גדולים יותר וחמים יותר. בנוסף, זמן החיים של כוכב ארוך יותר ככל שהוא נוצר קטן יותר.

1.4 משוואות עבור התפתחות כוכבים

הנוסחאות ששולטות בהתפתחות כוכבים :

1. שיווי משקל הידרוסטטי

$$(6) \quad \frac{dp(r)}{dr} = - \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

2. משוואת רציפות המסה :

$$(7) \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

3. משוואת מעבר קרינה :

$$(8) \quad \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 acT(r)^3}$$

4. משוואת שימור אנרגיה

$$(9) \quad \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\epsilon(r)$$

בקורס זה לא נפתור את המשוואות (פותרים אותן בקורס אסטרופיזיקה) אך נשתמש במשוואות אלו על מנת לקבל יחסי סקאלה חשובים בין גדלים אסטרונומיים. כמו שניתן לראות, שלושה קשרים חשובים הנובעים מהמשוואות :

$$(10) \quad (10.1) P \sim \frac{M\rho}{r}, \quad (10.2) M \sim r^3\rho, \quad (10.3) L \sim \frac{T^4 r}{\kappa\rho}$$

עבור גז אידיאלי $P \sim \rho T$. נציב לתוך יחס הסקאלה $P \sim \frac{M\rho}{r}$ ונקבל :

$$(11) \quad T \sim \frac{M}{r}$$

נשתמש בתוצאה שקיבלנו במשוואה (11) ונקבל קשר נוסף :

$$(12) \quad L \stackrel{(10.3)}{\sim} \frac{T^4 r}{\kappa\rho} \sim \left(\frac{M}{r}\right)^4 \frac{r}{\kappa\rho} \stackrel{(10.2)}{\sim} \left(\frac{r^3\rho}{r}\right)^4 \frac{r}{\kappa\rho} \sim r^9 \rho^3 \sim M^3$$

קיבלנו את התוצאה ממקודם : $L \sim M^3$ עבור כוכבי סדרה ראשית מאסיביים.

1.5 גבול צ'נדראסקאר

גבול צ'נדראסקאר מגדיר את המסה הסופית המקסימלית שיכולה להיות לננס לבן. בגבול זה הכבידה שהכוכב מרגיש והלחץ (לחץ אלקטרוני מנוון) מנגד מתאזנים. מעבר למסה הזו, כלומר עבור כוכב (רמננט) עם מסה סופית גבוהה יותר, הלחץ לא מצליח לתמוך בכוכב - הכבידה תנצח והכוכב יעבור קריסה כבידתית. מסת צ'נדראסקאר היא בקירוב $M_{ch} \approx 1.4 M_{\odot}$.

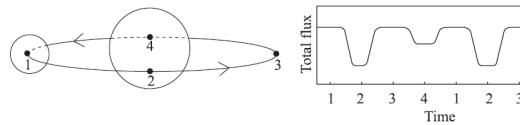
2. מערכות בינאריות ומדידת מסה

2.1 סיווג מערכות בינאריות

מדידה ישירה של מסת הכוכב מתאפשרת רק במערכות בינאריות הכוללות שני כוכבים או יותר. רוב הכוכבים שאנו מכירים נמצאים במערכות בינאריות (השמש היא כוכב בודד).

סוגים של מערכות בינאריות:

- א. *Visual binaries* - שני כוכבים הנראים כאילו הם נעים סביב מרכז מסה משותף. במקרים רבים ההפרדה ביניהם מאוד גדולה ולכן זמן המחזור שלהם ארוך מאוד.
- ב. *Astronomic binaries* - מערכת בה אחד הכוכבים נראה לעין (בהיר יותר), והשני חיזור (עמום יותר) כך שלא ניתן לראות אותו בבירור כמו הראשון. הכוכב הבהיר מבין שני הכוכבים נקרא ה *primary* והעמום יותר נקרא *companion*. ניתן לצפות בכוכב הבהיר יותר מבין השניים ולמדוד את זמן המחזור המשותף סביב מרכז המסה.
- ג. *Eclipsing binaries* - כל אחד מהכוכבים מסתיר את השני בצורה מחזורית. כאשר נמדוד את השטף כפונקציה של הזמן נצפה לקבל 2 ירידות בעוצמת השטף הכולל עבור כל ליקוי בזמן מחזור אחד.

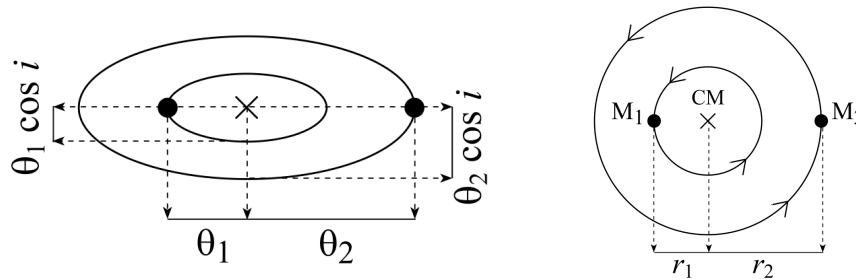


איור 2: תאור סכמטי של מערכת eclipsing binary משמאל ושטף הכולל כפונקציה של זמן מימין.

- ד. *Spectroscopic binaries* - בדרך כלל במערכת זו קשה לראות את הכוכבים ישירות כי ההפרדה בין שני הכוכבים היא קטנה והמהירות האורביטלית היא יחסית גבוהה. כל עוד מישור הסיבוב של המערכת הוא לא ניצב לקו הראייה של הצופה, ניתן לבצע ספקטרוסקופיה ולקבל את המהירות הרדיאלית של הכוכבים על ידי אפקט דופלר.

2.2 מציאת מסת הכוכב במערכות בהן ניתן לראות את הכוכבים.

ניתן לקבל את המסה של הכוכבים במערכת הבינארית באמצעות פתרון לבעיית שני גופים במסלולים אליפטיים (קפלר). נניח שהכוכבים נעים במסלולים מעגליים כמו באיור:



איור 3: תאור סכמטי של תנועת שני כוכבים סביב מרכז מסה משותף, מדידת המרחקים הרדיאליים והזוויתיים

מהמסלולים של הגופים ניתן לקבל את הקשר הבא:

(13)

$$r_1 M_1 = r_2 M_2$$

אם נסמן $a = r_1 + r_2$ נקבל

$$(14) \quad r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a, \quad r_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} a$$

בנוסף, כיוון ששני הכוכבים בקירוב באותו מרחק d מאיתנו, נוכל לרשום את הקשר בין המסות לזוויות:

$$(15) \quad \frac{\theta_1 d}{\theta_2 d} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

משוואת התנועה עבור מסה אחת:

$$(16) \quad M_1 \omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{a^2}$$

ולכן הביטוי המתקבל עבור התדירות:

$$(17) \quad \omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}$$

דוגמא: בעזרת הביטוי לתדירות נחשב את מסת השמש כאשר נניח כי $M_\odot \gg M_\oplus$ וגם נניח כי השמש נמצאת על ציר הסיבוב של כדור הארץ.

$$M_\odot = \frac{\omega^2 d_\oplus^3}{G} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d_\oplus^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{3.15 \cdot 10^7 \text{ s}}\right)^2 \cdot \frac{(1.5 \cdot 10^{13} \text{ cm})^3}{6.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{erg} \cdot \text{cm}}{\text{g}^2}} = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$$

2.2 מציאת מסת הכוכב במערכת Spectroscopic binaries

במערכות *Spectroscopic binaries* לא תמיד ניתן לראות את הכוכבים ישירות ולכן לא ניתן למדוד ישירות את הרדיוסים ממרכז המסה ואת a . בכדי לקבל על הכוכבים מידע, נוכל להסיק את המהירות הרדיאלית של הכוכבים באמצעות אפקט דופלר:

$$(18) \quad |v_{1,obs}| = |v_1| \sin(\phi), \quad |v_{2,obs}| = |v_2| \sin(\phi), \quad |v_1| = \frac{2\pi r_1}{\tau}, \\ |v_2| = \frac{2\pi r_2}{\tau}$$

נקבל את היחס:

$$(19) \quad \frac{|v_{1,obs}|}{|v_{2,obs}|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

בשילוב חוק קפלר השלישי נוכל לרשום את הביטוי :

(20)

$$(M_1 + M_2) \sin^3(\phi) = \frac{\tau(|v_{1,obs}| + |v_{2,obs}|)^3}{2\pi G}$$

בעזרת משאווה זו אפשר למצוא את המסות.

3. תרגילים

3.1 תרגיל 1

פונקציית הלומינוסיטי של קבוצת אובייקטים היא התפלגות הלומינוסיטי הנצפית ממנה. לננסים לבנים *Luminosity function* של בערך $\frac{dN}{dL} \sim L^{-\frac{7}{4}}$, עם *cut off* מתחת ללומינוסיטי של $L \sim 3 \cdot 10^{-5} L_{\odot}$. צריך להראות שזה נובע מהמאפיינים של ננס לבן בצורה הבאה:

א. נניח שננסים לבנים נוצרים בקצב קבוע של $\frac{dN}{dt}$ מכוכבים שסיימו את תהליך ההתפתחות שלהם.

השתמשו ביחסי הסקאלות: $\frac{dT}{dt} \propto T^4$, $L \propto T^4$ בכדי לקבל את הביטוי ל- $\frac{dN}{dL}$.

ב. צריך להראות כי - $L_{cut\ off} \sim 3 \cdot 10^{-5} L_{\odot}$. באמצעות שימוש בעובדה ששלננס הלבן הקר ביותר

טמפרטורה של $T \sim 4000\text{ K}$ (נובע מכך שליקום גיל סופי). והמסה האופיינית של ננסים לבנים

היא $M_{WD} \approx 0.6 M_{\odot}$ ורדיוס $R_{WD} \approx 8500\text{ km}$.

3.2 תרגיל 2

המהירות הרדיאלית המקסימלית שנמדדה עבור שני גופים (חברים) במערכת בינארית ספקטרוסקופיית היא $v_1 = 100 \frac{km}{s}$, $v_2 = 200 \frac{km}{s}$ עם זמן מחזור של $T = 2\text{ Days}$. הניחו כי מסלול שני הגופים הוא מעגלי.

א. מצאו את יחס המסות של שני הכוכבים במערכת.

ב. עשו שימוש בחוק קפלר על מנת להעריך את $m_i \sin(\theta)$ עבור כל כוכב כאשר m_i היא מסת הכוכב ה- i ו- θ היא זווית ההטיה של המערכת.

ג. חשבו את $\langle \sin^3(\theta) \rangle$ עבור מכלול של מערכות בינאריות עם זווית הטעה רנדומלית ומצאו את מסות הכוכבים עם ערך התוחלת הממוצע של $\sin^3(\theta)$.