משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

משוואות דיפרנציאליות

במשוואה דיפרנציאלית, הנעלם הוא פונקציה, למשל $x(t)$. במשוואה מופיעים הפונקציה ונגזרותיה, וגם ארגומנט הפונקציה, t. דוגמה פיזיקלית היא תנועה של גוף הנתון לכוח של קפיץ עם קבוע k, כוח גרר (בגלל תנועה בתוך גז או נוזל) עם מקדם קבוע b וכוח נוסף תלוי־זמן עם אמפליטודה f:

$$m\ddot{x}(t) = -b\dot{x}(t) - kx(t) + f\sin(\omega t) \tag{1}$$

משוואה כזאת, שבה מופיעה נגזרת שנייה, נקראת משוואה דיפרנציאלית **מסדר שני**. אנחנו נתחיל את הלימוד ממשוואות דיפרנציאליות **מסדר ראשון**, שבהן מופיעה רק הנגזרת הראשונה של הפונקציה הנעלמת. דוגמה פיזיקלית היא המשוואה עבור המהירות $v(t)$ בנוכחות כוח גרר וכוח תלוי־זמן:

$$m\dot{v}(t) = -bv(t) + f\sin(\omega t) \tag{2}$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון הן משוואות מהצורה

$$\frac{dx}{dt} = p(t, x(t)) \tag{3}$$

בפרק זה נלמד לפתור שני סוגים נפוצים של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון: משוואות עם הפרדת משתנים ומשוואות ליניאריות.

משוואות עם הפרדת משתנים

נסתכל על משוואות שניתן לרשום בצורה

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m(t)}{n(x)} \tag{4}$$

כאשר $m(t)$ ו־$n(x)$ הן פונקציות כלשהן של t ו־x, בהתאמה.

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

נכפיל את שני האגפים ב־$n(x)$ ונוסיף אינטגרציה לפי t:

$$\int n(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int m(t)\,dt \tag{5}$$

באגף שמאל, נעבור ממשתנה t למשתנה x (שיטת ההצבה), נקבל

$$\int n(x)\,dx = \int m(t)\,dt \tag{6}$$

ונפתור את שני האינטגרלים. שימו לב שבעצם משוואה (6) מתקבלת ממשוואה (4) ע"י העברת כל מה שמערב x לאגף עם ה־dx במונה וכל מה שמערב t לאגף עם ה־dt במונה ("הפרדת משתנים") וביצוע אינטגרציה.

דוגמה: נסתכל על המשוואה

$$\dot{x}x^2 + t^2 = 1 \tag{7}$$

נשים לב שניתן לרשום אותה גם כך:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-t^2}{x^2} \tag{8}$$

מכאן נקבל

$$\int x^2 dx = \int (1-t^2)\,dt \tag{9}$$

$$\frac{x^3}{3} = t - \frac{t^3}{3} + C \tag{10}$$

כך שהפתרון הוא

$$x(t) = \sqrt[3]{3\left(t - \frac{t^3}{3} + C\right)} \tag{11}$$

ניתן גם לבדוק שזהו אכן פתרון ע"י הצבתו במשוואה.

הפתרון הנ"ל תקף עבור כל ערך של C, לכן יש משפחה של פונקציות המקיימות את המשוואה. ניתן לקבוע את C באמצעות **תנאי התחלה**: אם ידוע שבזמן כלשהו t_0 מתקיים $x(t_0) = x_0$ כאשר x_0 מספר נתון, ניתן לחלץ את C. למשל אם נתון בדוגמה הנ"ל ש־

$$x(0) = 1 \tag{12}$$

אז

$$C = \frac{1}{3} \tag{13}$$

ואנחנו מקבלים

$$x(t) = \sqrt[3]{3t - t^3 + 1} \tag{14}$$

דרך אחרת להתחשב בתנאי ההתחלה היא על ידי שימוש באינטגרל מסוים. עבור הדוגמה הקודמת, נרשום את משוואה (9) כשוויון בין אינטגרלים מסוימים, כאשר בגבולות התחתונים נציב את הערכים המהווים את תנאי ההתחלה (בדוגמה שלנו: $t=0, x=1$) ובגבולות העליונים זמן כללי T והערך המתאים $X(T)$ (שאותו אנחנו רוצים למצוא):

$$\int_1^{X(T)} x^2 dx = \int_0^T \left(1-t^2\right) dt \tag{15}$$

מפתרון האינטגרלים נקבל

$$\frac{X(T)^3}{3} - \frac{1}{3} = T - \frac{T^3}{3} \tag{16}$$

כלומר

$$X(T) = \sqrt[3]{3T - T^3 + 1} \tag{17}$$

כמו שקיבלנו קודם.

דוגמה:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+2x} \tag{18}$$

אנחנו מקבלים

$$\int (1+2x)\, dx = \int \cos t\, dt \tag{19}$$

$$x + x^2 = \sin t + C \tag{20}$$

ניתן לקבל גם ביטוי מפורש ל־$x(t)$ ע"י פתירת משוואה ריבועית.

משוואות ליניאריות

המשוואה נקראת **ליניארית** אם היא מערבת רק את החזקות הראשונות של הפונקציה הנעלמת $x(t)$ והנגזרת שלה $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = f(t)\, x(t) + g(t) \tag{21}$$

כאשר $f(t)$ ו־$g(t)$ הן פונקציות נתונות.

נשים לב שעבור $g(t)=0$ מקבלים את המשוואה $\dot{x}(t) = f(t)\, x(t)$ שניתן לראות את הפתרון שלה מיידית:

$$x(t) = e^{F(t)} \tag{22}$$

כאשר

$$F(t) = \int f(t)\, dt \tag{23}$$

כך ש־$f(t) = \dot{F}(t)$ היא הנגזרת הפנימית של האקספוננט.

ניתן לקבל את הפתרון גם בשיטת הפרדת המשתנים:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\,x(t) \tag{24}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int f(t)\,dt \tag{25}$$

$$\ln x = \int f(t)\,dt \tag{26}$$

$$x(t) = e^{\int f(t)\,dt} \tag{27}$$

כעת ניגש למשוואה (21) עם $g(t)$ כללי. מבלי לפגוע בכלליות, נרשום את הפתרון באופן הבא:

$$x(t) = v(t)\,e^{F(t)} \tag{28}$$

כאשר כמו קודם

$$F(t) = \int f(t)\,dt \tag{29}$$

השינוי בפתרון בגלל קיומו של האיבר $g(t)$ נמצא בפונקציה $v(t)$, שאותה אנחנו עדיין צריכים למצוא. כדי לעשות זאת, נציב את הביטוי (28) במשוואה (21) ונקבל

$$\dot{v}(t)\,e^{F(t)} + v(t)\,e^{F(t)}\,\underbrace{\dot{F}(t)}_{f(t)} = f(t)\,v(t)\,e^{F(t)} + g(t) \tag{30}$$

מהשוואת שני האגפים נקבל $\dot{v}(t)\,e^{F(t)} = g(t)$, כלומר

$$\dot{v}(t) = g(t)\,e^{-F(t)} \tag{31}$$

כעת נוכל לקבל את $v(t)$ על ידי אינטגרציה

$$v(t) = \int g(t)\,e^{-F(t)}dt \tag{32}$$

לסיום, נציב את התוצאה במשוואה (28) כדי לקבל את $x(t)$.

הערה: אין צורך לדאוג לקבוע אינטגרציה C בחישוב של $F(t)$ לפי משוואה (29). קבוע כזה יתבטל בכל מקרה בין משוואה (32) שבה הוא יופיע כפקטור e^{-C} למשוואה (28) שבה הוא יופיע כפקטור e^{C}. לעומת זאת, קבוע האינטגרציה שיופיע בפתרון האינטגרל עבור $v(t)$ במשוואה (32) יישאר בפתרון הסופי.

דוגמה: מצאו את הפתרון למשוואה

$$\dot{x}(t) = 5x(t) + t\,, \qquad x(0) = 0 \tag{33}$$

נרשום את הפתרון בצורה

$$x(t) = v(t)\, e^{5t} \tag{34}$$

ונציב במשוואה. נקבל

$$\dot{v}(t)\, e^{5t} + 5v(t)\, e^{5t} = 5v(t)\, e^{5t} + t \tag{35}$$

ולכן

$$\dot{v}(t) = te^{-5t} \tag{36}$$

מכאן נקבל:

$$v(t) = \int te^{-5t} dt \;=\; t\,\frac{e^{-5t}}{-5} - \int \frac{e^{-5t}}{-5} dt \tag{37}$$

$$= -\frac{te^{-5t}}{5} - \frac{e^{-5t}}{25} + C \tag{38}$$

הפתרון הכללי הוא אם כן

$$x(t) = \left(-\frac{te^{-5t}}{5} - \frac{e^{-5t}}{25} + C\right) e^{5t} \tag{39}$$

$$= -\frac{t}{5} - \frac{1}{25} + Ce^{5t} \tag{40}$$

התנאי $x(0) = 0$ נותן

$$0 = 0 - \frac{1}{25} + C \tag{41}$$

נחלץ מכאן את C, נציב אותו בפתרון הכללי ונקבל

$$x(t) = \frac{1}{25}\left(e^{5t} - 1\right) - \frac{t}{5} \tag{42}$$