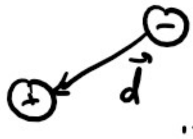
דיפול חשמלי

(א) הגדרת הדיפול היא התפלגות מטען לחלק חיובי וחלק שלילי.
Dipole – Di=2 , pole-קוטב.



דיפול קלאסי של שני חלקיקים יתואר כך:
כאשר הוקטור $\vec{d}$ יצביע תמיד מהמטען השלילי לחיובי.

במקרה של גוף רציף יכול להיות מדובר בטבעת שמטענה חצי חיובי וחצי שלילי

(ב) למה אנחנו צריכים את הגדרת הדיפול?

כאשר אנחנו רוצים למצוא פוטנציאל של התפלגות מטען כלשהי עבור מרחק רחוק מההתפלגות נוכל לפתח לטור טיילור:

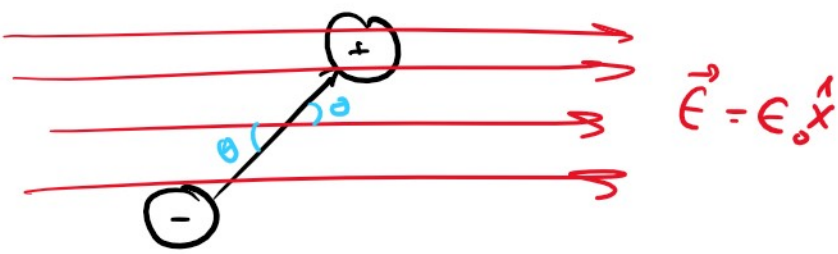
$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r})}{r} dv$$

$$\phi(\vec{r}) \sim \frac{Q}{r} + \frac{k\cdot\vec{p}\,\hat{r}}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \ldots\ldots \quad (r >> d)$$

עבור התפלגות כמו הדיפול שבה $Q=0$ נצטרך לקחת בחשבון את האיבר השני בפיתוח.

לכן כאשר גם פוטנציאל הדיפול מתאפס ניקח את הסדר הבא של הקוודרופול.

מה קורה כאשר שמים דיפול בשדה חשמלי חיצוני

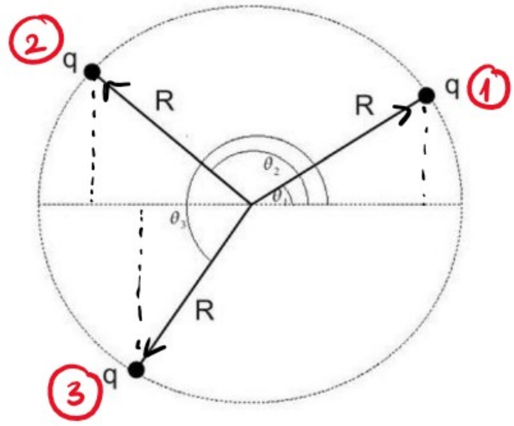


הפוטנציאל של הדיפול במקרה **כללי** : $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

שדה חשמלי גורם לדיפול להסתובב : $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$

תרגיל 1 :

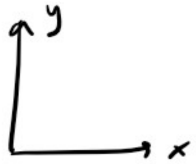
על מעגל ברדיוס R ממוקמים שלושה מטענים זהים בעלי מטען q כל-אחד בזויות $\theta_3, \theta_2, \theta_1$ מהכיוון החיובי של ציר ה-x, כפי שמתואר בשרטוט.



א. מצא/י את השדה החשמלי במרכז המעגל

ב. האם את/ה יכול/ה למצוא שלוש זויות $\theta_3, \theta_2, \theta_1$ כך שהשדה החשמלי במרכז המעגל מתאפס?

פתרון 1 :



א) נמצא קודם את מיקומי החלקיקים ביחס למרכז המעגל.

$$\vec{r}_1 = (R\cos\theta_1 , R\sin\theta_1)$$

$$\vec{r}_2 = (R\cos(\pi-\theta_2), R\sin(\pi-\theta_2)) = (-R\cos\theta_2 , +R\sin\theta_2)$$

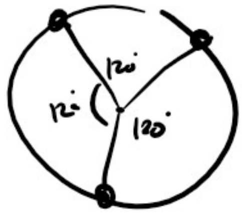
$$\vec{r}_3 = (-R\cos\theta_3 , -R\sin\theta_3)$$

נשתמש בנוסחת השדה : $\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}$

$$\vec{E}_{tot} = \frac{kqR}{R^3}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 - \cos\theta_3 , \sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin\theta_3)$$

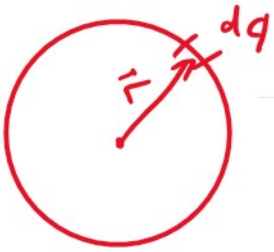
ב) השדה יתאפס כאשר תהיה סימטריה כלומר שכל המטענים

יהיו ממוקמים במרחק של 120° אחד מהשני.



$$\begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 120 \\ \theta_3 = \theta_2 + 240 \end{cases}$$

תרגיל 2:



מהו מומנט הדיפול של טבעת מקוטבת שהמטען עליה נתון ע"י $\lambda(\varphi)=\lambda_0\sin\varphi$?

פתרון 2:

מהגדרת מומנט הדיפול: $\vec{P} = \int \vec{r}\, dq$

כאשר $dq = \lambda\, dl$

ובמקרה של טבעת כמו שראינו בתרגול הקודם: $dq = \lambda \cdot R\, d\theta$

$$\longrightarrow \quad dq = \lambda_0 \sin\theta\, R\, d\theta$$

כאשר $\vec{r}$ זהו המיקום של dq ונוכל לבטא אותו ביחס למרכז המעגל.

$$\vec{r} = (R\cos\theta,\ R\sin\theta)$$

$$P_x = R^2\lambda_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2} R^2 \lambda_0 \int_0 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta$$

[שימוש בזהות
$\frac{1}{2}\sin(2\theta) = \cos\theta \sin\theta$]

$$P_x = -\frac{1}{2}\lambda_0 R^2 \left[\cos(2\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$P_y = R^2\lambda_0 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = R^2\lambda_0 \cdot \pi$$

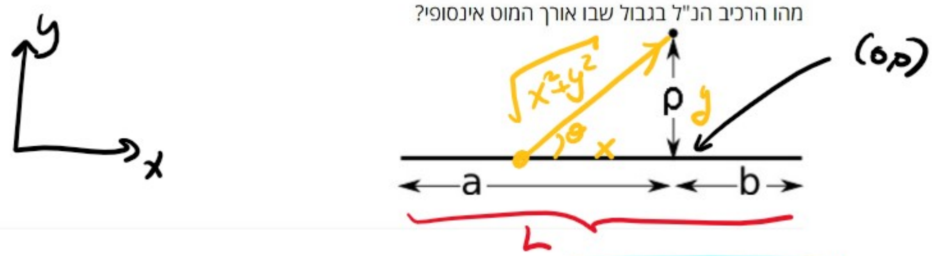
[שימוש בזהות

$$\left[\text{שימוש בזהות} \quad \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right) = \sin^2\theta\right]$$

$$\vec{P} = \left(0, R^2\lambda_0\pi\right)$$

תרגיל ③:

נתון מוט באורך L ($L = a + b$) . המוט טעון בצורה אחידה עם צפיפות מטען ליחידת אורך λ.
מהו רכיב השדה החשמלי בכיוון המאונך למוט (לאורכו של ρ) בנקודה שסומנה בציור (במרחק ρ מהמוט, וa מהקצה השמאלי שלו)?
מהו הרכיב הנ"ל בגבול שבו אורך המוט אינסופי?



פתרון ③:

ניקח שוב dq של המוט : $dq = \lambda \cdot dl = \lambda dx$

מבוקש את השדה בנק' הנקודה השמאלית בכיוון $\hat{y}$ לכן:

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$$

$$dE_y = \frac{k \cdot \lambda dx}{(x^2+y^2)} \cdot \sin\theta\, \hat{y} = \frac{k\lambda \cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx$$

$$E_y = \int_{-a}^{b} \frac{k\lambda y}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx = k\lambda\left[\frac{y \cdot x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-a}^{b}$$

$$= k\lambda\left[\frac{y \cdot b}{y^2\sqrt{y^2+b^2}} - \frac{y \cdot a}{y^2\sqrt{y^2+a^2}}\right] =$$

$$= \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{b}{\sqrt{y^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}\right]$$

בגבול שבו התיל אינסופי כלומר $a,b \to \infty$

ולכן האינטגרל הקודם יהיה:

$$E_y = k\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx = \frac{2k\lambda}{y}$$

תרגול 4:

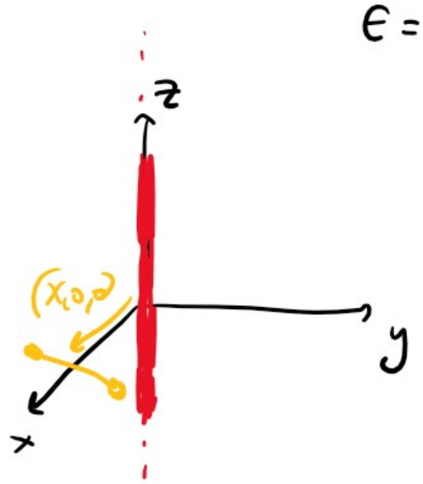
תיל אינסופי נמצא על ציר z וטעון באופן אחיד בצפיפות מטען λ ליחידת אורך. על ציר x בנקודה $(x,0,0)$ נמצא דיפול חשמלי $\vec{p} = p\cos\alpha\hat{x} + p\sin\alpha\hat{y}$.

1. מהו מומנט הכוח על הדיפול?
2. מהי האנרגיה של הדיפול בשדה של התיל?

[redacted]

נתון שדה של תיל חשמלי אינסופי $\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$

פתרון 4:



① מומנט הדיפול $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

השדה $\vec{E}$ שהתיל יפעיל על מיקום הדיפול הוא

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{x}\hat{x}$$

$$\vec{p} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ p\cos\alpha & p\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{p}\times\vec{E}=\begin{vmatrix} p\cos\alpha & p\sin\alpha & 0 \\ \frac{2k\lambda}{x} & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\hat{x}\cdot 0-\hat{y}\cdot 0+\hat{z}\left(0-p\sin\alpha\cdot\frac{2k\lambda}{x}\right)$$

$$\vec{\tau}=\left(0,0,\frac{-2k\lambda p\sin\alpha}{x}\right)$$

כלומר הדיפול יסתובב עם כיוון השעון מסביב לציר $\hat{z}$.
(כלל יד ימין).

2

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$U=(p\cos\alpha,p\sin\alpha,0)\cdot\left(\frac{2k\lambda}{x},0,0\right)\cdot(-1)$$

$$U=-\frac{2k\lambda}{x}\cdot p\cos\alpha$$