פתרון תרגיל 1

נתונים הווקטורים הבאים:

$$\vec{A}=(3,4),\vec{B}=(6,-8),\vec{C}=(3,3,3),\vec{D}=(2,1,3)$$

א.חשב/י את המכפלה הסקלרית $\vec{A}\cdot\vec{B}$, מהי הזווית בין שני הווקטורים ?

ב.חשב/י את המכפלה הווקטורית : $\vec{A}\times\vec{B}$.

ג.חשב/י את הגודל של הווקטור $\vec{C}\times\vec{D}$.

e_01_05_013 . S

פתרון -

$\vec{A}=(3,4)$ $\vec{B}=(6,-8)$ $\vec{C}=(3,3,3)$ $\vec{D}=(2,1,3)$

א) $\vec{A}\cdot\vec{B}=?$ $\theta=?$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y$$

$$=3\cdot 6+4(-8)=18-32=-14$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

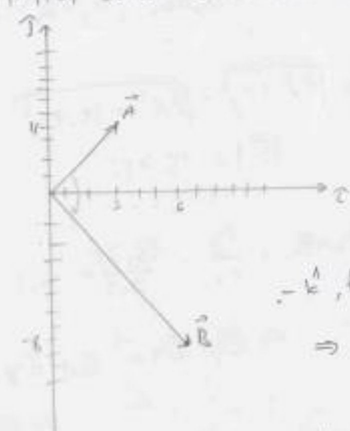
$$|\vec{A}|=\sqrt{3^2+4^2}=5 \qquad |\vec{B}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{-14}{50}=-0.28$$

$$\Rightarrow \theta=106.26^\circ$$

ב) $\vec{A}\times\vec{B}$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta=5\cdot 10\cdot\sin 106.26=48$$



הכיוון ⊗, לתוך הדף, $-\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=-48\hat{k}$$

ג) $|\vec{C}\times\vec{D}|=?$

$$|\vec{C}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27} \qquad |\vec{D}|=\sqrt{2^2+1+3^2}=\sqrt{14}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{D}=|\vec{C}||\vec{D}|\cos\alpha=C_xD_x+C_yD_y+C_zD_z$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{6+3+9}{\sqrt{378}}=0.925 \Rightarrow \alpha=22.2^\circ$$

$$|\vec{C}\times\vec{D}|=\sqrt{378}\sin 22.2^\circ=7.35$$

.Calculate the volume of a ball with radius R .1

.Calculate the surface area of a ball with radius R .2

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} r^2 \sin\theta \, dr =$$

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{R} r^2 \, dr =$$

$$2\pi \left. \frac{r^3}{3} \right]_0^R \left. -\cos\theta \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \, d\theta = 2\pi R^2 \left. (-\cos\theta) \right]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi R^2$$

נתונים שלושה ווקטורים : $\vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}, \vec{a}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$
$\vec{c}=4\hat{i}-1\hat{j}+3\hat{k},$

א.חשבו את האורך של כל ווקטור.

ב.מהי הזוויתבין הווקטור $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ לבין כל אחד מהווקטורים $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

ג.האם הווקטורים יוצרים משולש ?

e_a_5_014_5

נתונים -

$\vec{a}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ $\quad \vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ $\quad \vec{c}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

א) אורך כל וקטור -

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$

$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=7$

$|\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}=5.1$

ב)

$\vec{D}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2+6+4,-2-3-1,-1+2+3)$

$\vec{D}=(12,-6,4)$

$|\vec{D}|=\sqrt{12^2+(-6)^2+4^2}=14$

θ_{Da}: $\quad \vec{a}\cdot\vec{D}=a_xD_x+a_yD_y+a_zD_z=|\vec{a}||\vec{D}|\cos\theta_{Da}$

$\Rightarrow \cos\theta_{Da}=\frac{2\cdot12+(-2)(-6)+4(-1)}{3\cdot14}=0.76$

$\Rightarrow \theta_a=40.37°$

θ_{Db}: $\quad \cos\theta_{Db}=\frac{6\cdot12+(-3)(-6)+2\cdot4}{14\cdot7}=\frac{98}{98}=1$

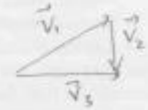
ואז כאילו אין $\vec{b}=2\vec{D}$ $\quad$ כצפוי כי $\rightarrow$ $\quad \Rightarrow \theta_{Db}=0°$

θ_{Dc}: $\quad \cos\theta_{Dc}=\frac{4\cdot12+(-6)(-1)+3\cdot4}{5.1\cdot14}=\frac{66}{71.4}=0.92$

$\Rightarrow \theta_{Dc}=22.42$

ג. וקטורים שיוצרים משולש צריך לקיים את הקשר

$\vec{V}_1+\vec{V}_2=\pm V_3$



במקרה שלנו מתקיים

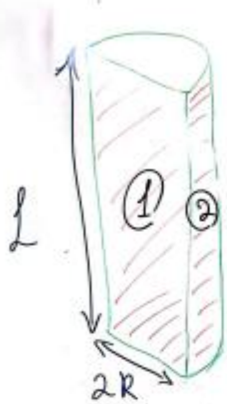
$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$

לכן 3 הוקטורים יוצרים משולש.

נתון חצי גליל כזה שעבורו $0 < \theta < \pi$ ברדיוס R וגובה L .

א. חשבו את נפחו של חצי הגליל.

ב. חשבו את שטח המעטפת של חצי הגליל



א)
$$V=\iiint dV=\int_0^L\int_0^{\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz=\boxed{\frac{\pi R^2 L}{2}}$$

ב)
$$S=S_1+S_2$$

$$S_1=\int_0^L\int_0^{2R}dx\,dy=\left(\begin{array}{c}\text{שטח}\\ \text{מלבן}\\ 2R\times L\end{array}\right)=2RL$$

$$S_2=\int_0^L\int_0^{\pi}R\,d\varphi\,dz=\pi RL$$

שכחת הבסיסים!

$$\Rightarrow S=\pi RL+2RL=\boxed{RL(2+\pi)}$$

1. חשבו את כמות המטען הכוללת עבור מוט באורך L (המתחיל בראשית ומסתיים בנק' L) בעל צפיפות מטען קווית:

$$\lambda(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

2. חשבו את כמות המטען הכוללת עבור טבעת ברדיוס R בעלת צפיפות מטען קווית:

$$\lambda(\theta) = \lambda_0(\cos\theta)^2$$

א

$$Q = \int \lambda(x)\,dx = \int_0^L \lambda_0 \frac{x^2}{L^2}\,dx = \frac{\lambda_0 x^3}{3L^2}\Big|_0^L =$$

$$= \frac{\lambda_0 L}{3} \quad //$$

ב

$$Q = \int \lambda(\theta)\, R\, d\theta = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos^2\theta\, R\, d\theta =$$

$$= \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \lambda_0 R \pi \quad //$$