פתרון תרגיל 2

א. שני מטענים נקודתיים q ו-Q נמצאים במרחק 40 ס"מ אחד מהשני.

נתון כי $Q = 4\mu c, q = 3\mu c$. מהו הכוח בין המטענים?

ב. שני מטענים נקודתיים q ו-Q נמצאים במרחק של 2 מטרים אחד מהשני.

ידוע כי גודל הכוח ביניהם הינו 0.05N. מה הוא המטען של כל אחד מהם אם אם מתקיים $Q + q = 10\mu c$?

ג. מסתו של הגמל הכי יפה בנגב היא חצי טון.

גמל זה טעון במטען Q והוא מרחף בגובה 10 מטרים מעל מטען נקודתי Q זהה שנמצא על הקרקע כתוצאה מדחייה חשמלית. מצאו את גודל המטען Q.

(א

$Q = 4\mu C = 4\cdot 10^{-6}\,C$

$q = 3\mu C = 3\cdot 10^{-6}\,C$, $r = 40\,cm = 40\cdot 10^{-2}\,m$

$$\bar{F} = k\,\frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6}}{(40\cdot 10^{-2})^2}\,\hat{r}$$

where: $k = 9\cdot 10^{9}$

$$\boxed{\bar{F} = 0.675\,\hat{r}\ [N]}$$

(ב

$r = 2\,m$, $|\bar{F}| = 0.05\,[N]$

$q + Q = 10\cdot 10^{-6}\,C$

נתון

סכום

$$|\bar{F}| = 9\cdot 10^{9}\,\frac{qQ}{4} = 0.05$$

$$\begin{cases} q\cdot Q = 2.222\cdot 10^{-11}\ [C^2] \\ q + Q = 10^{-5}\ [C] \end{cases}$$

נקבל מערכת משוואות!

$Q = 10^{-5} - q$

$\Rightarrow q(10^{-5} - q) = 2.222\cdot 10^{-11}$

$-q^2 + 10^{-5} q - 2.222\cdot 10^{-11} = 0$

משוואה ריבועית:

$$\boxed{q = 3.33\cdot 10^{-6}\,[C]\ \ //\ \ Q = 6.67\cdot 10^{-6}\,[C]}$$

הגמל נמצא
במנוחה ולכן
מתקיים
ניוטון I:

$m = 1000 [Kg]$, $r = 10 [m]$

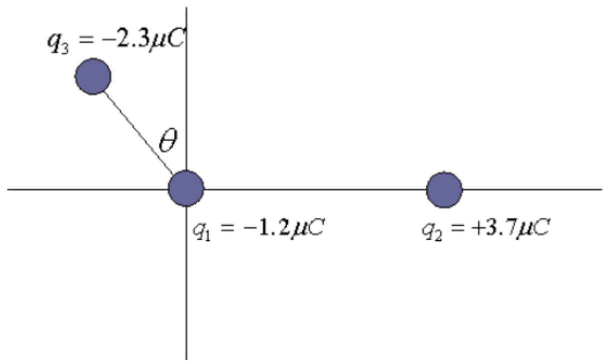
$$mg = k \frac{Q^2}{(r^2)}$$

$$1000 \cdot 9.81 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q^2}{100}$$

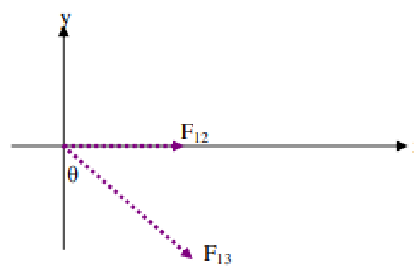
$$\Rightarrow \boxed{Q = \pm 7.45 \cdot 10^{-3} [C]}$$

בציור שלושה מטענים המוחזקים במקומותיהם. חשבו את הכוח (גודל וכיוון) הפועל על q_1 כאשר נתונים:

$$q_1 = -1.2\mu C$$
$$q_2 = 3.7\mu C$$
$$q_3 = -2.3\mu C$$
$$r_{12} = 15cm$$
$$r_{13} = 10cm$$
$$\theta = 32^\circ$$



`4. נפצל את הכוחות לרכיבים:



$$\left(F_{13}\right)_x = k\frac{q_1 q_3}{\left(r_{13}\right)^2}\sin\theta = 1.31N$$

$$\left(F_{13}\right)_y = k\frac{q_1 q_3}{\left(r_{13}\right)^2}\cos\theta = -2.1N$$

$$\left(F_{12}\right)_x = k\frac{q_1 q_2}{\left(r_{12}\right)^2} = 1.77N$$

מכאן, הכוח הכללי בכיוון x: $F_x = F_{12} + \left(F_{13}\right)_x = 3.08N$

הכוח הכללי בכיוון y: $F_y = \left(F_{13}\right)_y = -2.1N$

נתונים שלושה מטענים בקונפיגורציה הבאה:

$$\overrightarrow{r_1} = (0,0)\ ;\overrightarrow{r_2} = (d,0)\ ;\overrightarrow{r_3} = (d/2,2d)$$

כאשר $q_1 = q; q_2 = -2q; q_3 = 3q$

מהו הכח (גודל וכיוון) הפועל על המטען העליון?

פתרון: (*)

נפתור באמצעות סופרפוזיציה. נתחיל מהכח שהמטען q מפעיל על המטען 3q:

$$\vec{F}_{1\to2} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

כאשר אצלנו:

$q_1 = q\ ;\ q_2 = 3q$

$\vec{r}_1 = (0,0)\ ;\ \vec{r}_2 = (\frac{d}{2}, 2d) \Rightarrow (\vec{r}_2-\vec{r}_1) = (\frac{d}{2}, 2d)$

$|\vec{r}_2-\vec{r}_1| = \sqrt{(\frac{d}{2})^2+(2d)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}}\,d \Rightarrow |\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3 = (\frac{17}{4})^{3/2}d^3$

נציב ונפרק לרכיבים:

$$F^{(x)}_{q\to3q} = k\frac{q\cdot3q}{(\frac{17}{4})^{3/2}d^3}\cdot\frac{d}{2} = \frac{3}{2d^2}\left(\frac{4}{17}\right)^{3/2}kq^2 \approx 0.17\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F^{(y)}_{q\to3q} = k\frac{q\cdot3q}{(\frac{17}{4})^{3/2}d^3}\cdot2d = \frac{6}{d^2}\left(\frac{4}{17}\right)^{3/2}kq^2 \approx 0.68\frac{kq^2}{d^2}$$

כלומר: $\vec{F}_{q\to3q} = (0.17, 0.68)\frac{kq^2}{d^2}$ //

(*) ראשית, כדאי להראות, ע"מ להקנות אינטואיציה, שניתן לצפות שוקטור הכח $\vec{F} = f_x\hat{x}+f_y\hat{y}$ יקיים $f_x>0$, $f_y<0$ ככלי לבדיקה בסוף התרגיל.

נחשב את הכח שהמטען $-2q$ מפעיל על המטען $3q$:

$$\vec{F}_{1\to2} = k\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

כאשר אצלנו -

$$q_1=-2q \quad \vec{r}_1=(d,0)$$
$$q_2=3q \quad \vec{r}_2=\left(\frac{d}{2},2d\right) \Rightarrow (\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\left(-\frac{d}{2},2d\right)$$
$$|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3=\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}d^3$$

נציב ונפריד לרכיבים:

$$F^{(x)}_{-2q\to3q}=k\,\frac{(-2q)\cdot3q}{\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}d^3}\left(-\frac{d}{2}\right)=3\left(\frac{4}{17}\right)^{3/2}\frac{kq^2}{d^2}\cong0.34\,\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F^{(y)}_{-2q\to3q}=k\,\frac{(-2q)\cdot3q}{\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}d^3}\cdot2d=-12\left(\frac{4}{17}\right)^{3/2}\frac{kq^2}{d^2}\approx-1.36\,\frac{kq^2}{d^2}$$

כלומר.

$$\vec{F}_{-2q\to3q}=(0.34,-1.36)\frac{kq^2}{d^2}\,//$$

והכח הכולל (אמרנו סופרפוזיציה):

$$\vec{F}_{tot}=\vec{F}_{q\to3q}+\vec{F}_{-2q\to3q}=(0.17+0.34,\ 0.68-1.36)\frac{kq^2}{d^2}=$$
$$=(0.51,\ -0.68)\frac{kq^2}{d^2}\,//$$

* כפי שציפינו; $f_x>0,\ f_y<0$
* בדיקת יחידות.

תיל ישר מונח על ציר x כך שקצה אחד ממוקם בראשית הצירים וקצה השני בנקודה x=L.

צפיפות המטען האורכית של המוט אינה אחידה ונתונה לפי $\lambda(x)=A\,x$

(כאשר A הוא קבוע)

א. חשבו את מטענו הכולל של המוט.

ב. מהו הכח אשר פועל על מטען q הממוקם בנקודה כללית x_0 על ציר x לצד המוט?

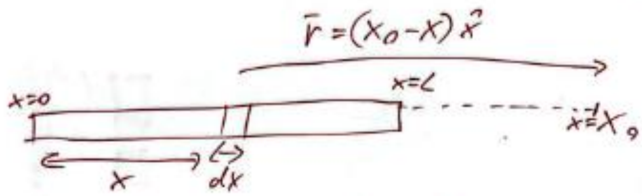
$$\int \frac{x}{(a-x)^2}dx \;=\; \frac{a}{a-x}+\log(a-x)$$

$$\lambda=\frac{dq}{dl} \Rightarrow dq=\lambda\,dl$$

בבע' ה' נתון: $\lambda=Ax\,,\; dl=dx$

ולכן $dq = Ax\,dx$

עכשיו נחשב את $\vec{r}$



ולכן $|\vec{r}|=x_0-x$!

נכ' ב הכל באלמנט כוח:

$$d\bar{F}=K\frac{q\,dq}{r^3}\vec{r}=Kq\frac{Ax\,dx}{(x_0-x)^{\cancel{3}\,2}}\cancel{(x_0-x)}\hat{x}$$

נאינטגרל:

$$\bar{F}=\int_0^L Kq\frac{Ax\,dx}{(x_0-x)^2}\hat{x}$$

אבל כבר נתנו לנו את האינטגרל הזה בשאלה! ולכן

$$\bar{F}=KqA\left[\frac{x_0}{x_0-x}+\log(x_0-x)\right]_{x=0}^{L}\hat{x}$$

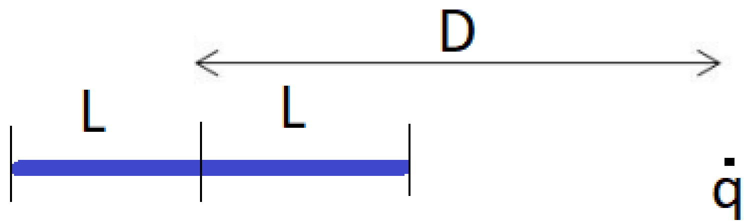
$$=\boxed{KqA\left(\frac{x_0}{x_0-L}-1+\log\left(\frac{x_0-L}{x_0}\right)\right)\hat{x}}$$

נתון מוט טעון באורך 2L שמרכזו בראשית הצירים.

צפיפות המטען האורכית של המוט היא $\lambda = \lambda_0 \frac{x}{L}$ בתחום $0 < x < L$ ו- $\lambda = -\lambda_0$ בתחום $-L < x < 0$.

בהמשך לציר המוט, מונח מטען q במרחק D ממרכז המוט, ראו ציור.

מצאו ביטוי כללי לכוח הפועל על q



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad , \quad dl = dx$$

$$dq_1 = \lambda_0 \frac{x}{L} dx \qquad dq_2 = -\lambda_0 dx$$

$$\vec{r} = (D-x)\hat{x} \quad , \quad |\vec{r}| = D-x$$

[illegible]!

$$F_{tot} = \int k \frac{q\, dq_1}{r^3} \vec{r} + \int k \frac{q\, dq_2}{r^3} \vec{r}$$

$$= kq \left(\int_0^L \frac{\lambda_0 \frac{x}{L} dx}{(D-x)^2} - \int_{-L}^0 \frac{\lambda_0 dx}{(D-x)^2} \right) \hat{x}$$

$$= kq \left(\frac{\lambda_0}{L} \left[\frac{D}{D-x} + \log(D-x) \right]_0^L - \lambda_0 \left[\frac{1}{D-x} \right]_{-L}^0 \right) \hat{x}$$

$$= kq \left(\frac{\lambda_0}{L} \left(\frac{D}{D-L} - 1 + \log\left(\frac{D-L}{D}\right) \right) - \lambda_0 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+L} \right) \right) \hat{x}$$

$$= kq\lambda_0 \left[\left(\frac{L}{L(D-L)} + \frac{1}{L} \log\left(\frac{D-L}{D}\right) \right) - \lambda_0 \frac{-L}{D(D+L)} \right] \hat{x}$$

$$\boxed{F_{tot} = kq\lambda_0 \left[\frac{1}{D-L} + \frac{1}{L} \log\left(\frac{D-L}{D}\right) + \lambda_0 \frac{L}{D(D+L)} \right] \hat{x}}$$