מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 4

אינטגרלים

נסמן את האינטגרל של $f\left(x\right)$:

$$F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx$$

ישנם שתי הגדרות לאינטגרל:

1. האינטגרל הלא מסויים הוא הפעולה ההפוכה לנגזרת, כלומר אם נגזור את $F\left(x\right)$ נקבל בחזרה את $f\left(x\right)$

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)$$

הפונקציה $F\left(x\right)$ נקראת הפונקציה הקדומה של $f\left(x\right)$.

2. האינטגרל המסויים - ניתן לשייך לאינטגרל המסויים משמעות של שטח, אם $f\left(x\right)\geq0$ בתחום $a\leq x\leq b$:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=S$$

האינגטגרל הוא השטח הכלוא בין הפונקציה לציר ה- x.
המשפט היסודי של החדו"א מאחד בין שתי ההגדרות:

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

שיטת ההצבה

עבור האינטגרל:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=\left\{ \begin{array}{c} g\left(x\right)=u\\ g'\left(x\right)=\frac{du}{dx} \end{array}\right\} =\int f\left(u\right)du$$

תרגיל 1

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int\frac{1}{\sin x}dx$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \\
&\{u=\cos x,\ \ du=-\sin x dx\} \\
&= -\int \frac{1}{1-u^2}du = -\int \frac{1}{(1+u)(1-u)}du = -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right]du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C
\end{aligned}
$$

הצבה אוניברסלית:

ההצבה האוניברסלית עוזרת לנו עבור אינטגרלים המכילים פונקציות טריגונומטריות במידה ואנחנו לא מוצאים זהות טובה יותר:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2t}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

תרגיל 2

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3}dx$$

פתרון

נפתור בעזרת ההצבה האוניברסלית:

$$\int \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3}dx \to \int \frac{2dt}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3\right)(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \left\{\begin{array}{c} u=t+1 \\ du=dt \end{array}\right\} = \int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \arctan(u) + C = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + C$$

אינטגרציה בחלקים

שיטת אינטגרציה לחישוב אינטגרלים מהסוג

$$\int f(x)g'(x)dx$$

השיטה שימושית כאשר f ניתנת לגזירה חוזרת ו g ניתנת לאינטגרציה חוזרת ללא קושי. לדוגמא, $\int x\cos x dx$ ו $\int x^2 e^x dx$. את $f(x)=x,\ x^2$ ניתן לגזור עד שמקבלים קבוע והאינטגרל של $g(x)=\cos x,\ e^x$ ניתן לחישוב בקלות.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx &= \int \left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]dx = \\
&= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

נעביר אגפים

$$\begin{aligned}
\int f'(x)g(x)dx &= \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int f(x)g'(x)dx \\
\int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

נוסחא קלה יותר לזכרון, נסמן $u=f(x)$ ו $v=g(x)$, אז $dv=g'(x)dx$,$du=f'(x)dx$ ו

$$\int udv = uv - \int vdu$$

תרגיל 3

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int x\sin(x)dx$$

פתרון

אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x)dx &= \{u=x, dv=\sin(x)dx; du=dx, v=-\cos(x)\} \\
&= (-\cos(x))\,x - \int (-\cos(x))\,dx \\
&= -x\cos(x)+\sin(x)+C
\end{aligned}$$

תרגיל 4

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \ln(x)\,dx$$

פתרון

$$\begin{aligned}&\int \ln(x)\,dx=\int 1\cdot\ln(x)\,dx\\ &\left\{\begin{array}{ll} u & =\ln(x)\,,\ \ du=\frac{dx}{x}\\ dv & =dx,\ \ v=x\end{array}\right\}\\ &=x\ln(x)-\int dx=x\ln(x)-x+C\end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקיים

כאשר יש לנו פולינום במכנה אנחנו רוצים לחלק אותו לכמה איברים שבכל אחד יש רק חזקה אחת של x, כך שנוכל לחשב את האינטגרל של כל שבר בנפרד, בשביל זה נעבוד בכמה שלבים:
אלגוריתם לחישוב $\int P_n(x)/Q_m(x)$

1. אם $n>m$, יש לחלק כך

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=D(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

כך ש $\deg[R]<\deg[Q]$, לדוגמא

$$\frac{x^3-3}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x-3}{x^2-1}=x+\frac{x-3}{x^2-1}$$

2. לכתוב את $Q(x)$ כמכפלת שורשים, לדוגמא,

$$\begin{aligned}Q(x)&=2x^4+5x^3+10x^2+25x\\ &=x\left(2x^3+5x^2+10x+25\right)\\ &=x\left(2x^3+5x^2+5(2x+5)\right)\\ &=x\left(x^2(2x+5)+5(2x+5)\right)\\ &=x(x^2+5)(2x+5)\end{aligned}$$

3. לכתוב את הביטוי כסכום של שברים חלקיים שבכל אחד מהם המכנה הוא אחד הגורמיים הראשוניים של השבר והמונה שלו הוא מדרגה אחת פחות מאשר המכנה

$$\frac{1}{x\,(x^2+5)\,(2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5}+\frac{D}{2x+5}$$

אם יש שורש מסדר l, נרשום סכום של l שברים, למשל

$$\frac{3x+5}{(2x-1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$$

4. את המונים ניתן למצוא על ידי הכפלה של המונים במכנים האחרים,

$$\frac{1}{x(x^2+5)(2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5}+\frac{D}{2x+5}=\frac{A\left(x^2+5\right)(2x+5)+x\,(Bx+C)\,(2x+5)+x\left(x^2+5\right)D}{x\,(x^2+5)\,(2x+5)}=$$

ואז השוואה של המונים משני צידי המשוואה,

$$\begin{aligned}\rightarrow 1&=A\left(2x^3+5x^2+10x+25\right)+B\left(2x^3+5x^2\right)+C\left(2x^2+5x\right)+D\left(x^3+5x\right)\\ 1&=x^3\,(2A+2B+D)+x^2\,(5A+5B+2C)+x\,(10A+5C+5D)+25A\end{aligned}$$

כדי שהשיוויון יתקיים צריך להתקיים שיוויון בין כל אחד מהמקדמים של החזקות השונות של x.

$$\begin{aligned} x^0: &\quad 25A = 1 \\ x^1: &\quad 10A + 5C + 5D = 0 \\ x^2: &\quad 5A + 5B + 2C = 0 \\ x^3: &\quad 2A + 2B + D = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{25} \\ C &= -\tfrac{2}{45} \\ B &= -\tfrac{1}{45} \\ D &= -\tfrac{8}{225} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(x^2+5)(2x+5)} = \frac{1}{25x} - \frac{x+2}{45\left(x^2+5\right)} - \frac{8}{225\left(2x+5\right)}$$

שיטת $Heaviside$ - שיטה נוספת למציאת המונים היא להכפיל את שני הצדדים באחד המכנים ואז להציב את מה שמאפס אותו

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\left(x^2+5\right)\left(2x+5\right)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{D}{2x+5} \\ \left.\frac{1}{\left(x^2+5\right)\left(2x+5\right)}\right|_{x=0} &= \left. A + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+5} + \frac{Dx}{2x+5}\right|_{x=0} \\ &\Rightarrow \quad A = \frac{1}{\left(0+5\right)\left(0+5\right)} = \frac{1}{25} \\ \left.\frac{1}{x\left(x^2+5\right)}\right|_{x=-\frac{5}{2}} &= \left.\frac{A\left(2x+5\right)}{x} + \frac{\left(Bx+C\right)\left(2x+5\right)}{x^2+5} + D\right|_{x=-\frac{5}{2}} \\ &\Rightarrow \quad D = \frac{1}{-\frac{5}{2}\left(\frac{25}{4}+5\right)} = -\frac{8}{225} \\ \left.\frac{1}{x\left(2x+5\right)}\right|_{x=\pm i\sqrt{5}} &= \left.\frac{A\left(x^2+5\right)}{x} + Bx + C + \frac{D\left(x^2+5\right)}{2x+5}\right|_{x=\pm i\sqrt{5}} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} i\sqrt{5}B + C &= -\frac{1}{10-i5\sqrt{5}} \\ -i\sqrt{5}B + C &= -\frac{1}{10+i5\sqrt{5}} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} C &= -\frac{2}{45} \\ B &= -\frac{1}{45} \end{cases} \end{aligned}$$

לאחר שהבאנו את הפונקציה לצורה הפשוטה ביותר, נחשב את האינטגרל. בד״כ נצטרך את אחד האינטגרלים הבאים

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{2}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{3}$$

תרגיל 5

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

פתרון

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$
$$\left\{u=x^2+a^2, \quad du=2xdx\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{1/2}}du=u^{1/2}+C=\sqrt{a^2+x^2}+C$$

תרגיל 6

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

פתרון

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$$
$$\left\{\frac{x}{a}=\sinh u, \quad dx=a\cosh u\right\}$$
$$\frac{1}{a}\int \frac{a\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}du=\int du=u+C=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C=$$
$$\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right|+C$$

תרגיל 7

פתרו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx$$

פתרון

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{3/2}}dx$$
$$\left\{\frac{x}{a}=\sinh u, \quad dx=a\cosh u\right\}$$
$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{a\cosh u}{\cosh^3 u}du=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2 u}du=\frac{\tanh u}{a^2}+C$$
$$=\frac{1}{a^2}\frac{\sinh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

משוואות ספרביליות

משוואה מהצורה $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$, נקראת משוואה ספרבילית אם ניתן **להפריד** בין המשתנים בצורה הזו :

$$\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}=g(x)h(t)$$

דהיינו כל הפונקציות של x יחד עם dx באגף אחד והפונקציות של t יחד עם dt באגף השני. נפתור לפי :

$$\int\frac{dx}{g(x)}=\int h(t)dt$$

תרגיל 1

פתרו את המשוואה

$$1+e^{t}x\dot{x}=0$$

פתרון

$$\begin{aligned}1+e^{t}x\dot{x}&=0\\ x\dot{x}&=-e^{-t}\end{aligned}$$

הגענו למשוואה ספרבילית

$$\begin{aligned}xdx&=-e^{-t}dt\\ \int xdx&=-\int e^{-t}dt\\ \frac{x^{2}}{2}&=e^{-t}+C\\ x&=\sqrt{2e^{-t}+C}\end{aligned}$$

תרגיל 2

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה :

$$y'=\frac{x^{2}}{\sin y}$$

בעבור תנאי השפה : $y\left(0\right)=\pi$

פתרון

$$
\begin{aligned}
y' =& \frac{x^2}{\sin y}\\
\frac{dy}{dx}\sin y =& x^2\\
\sin y dy =& x^2 dx\\
\int \sin y dy =& \int x^2 dx\\
-\cos y =& \frac{x^3}{3}+C\\
y =& \arccos\left(-\frac{x^3}{3}+C\right)
\end{aligned}
$$

נציב תנאי שפה:

$$
\begin{aligned}
y(0) = \pi =& \arccos\left(C\right)\\
C =& -1
\end{aligned}
$$

לכן הפתרון הינו

$$y = \arccos\left(-\frac{x^3}{3}-1\right)$$

משוואה לינארית מסדר ראשון

משוואה מהצורה:

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)$$

הינה לינארית.
כאשר $g\left(t\right)=0$ המשוואה נקראת משוואה הומוגנית. הפיתרון למשוואה הומוגנית הוא

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t)x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int f(t)dt$$

$$\ln x = F\left(t\right) + \tilde{C}$$

$$x = e^{F(t)+\tilde{C}} = Ce^{F(t)}$$

כאשר

$$F\left(t\right) = \int f(t)dt$$

כאשר $g(t) \neq 0$ המשוואה נקראת משוואה לא הומוגנית, על מנת לפתור אותה נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$x = Ce^{F(t)}$$

על מנת לפתור את המשוואה הלא הומוגנית נהפוך את הקבוע C למשתנה $C(t)$.
הפתרון הכללי הינו:

$$x = C(t)\, e^{F(t)}$$

כדי לפתור נציב חזרה במשוואה המקורית:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t)\, x + g(t)\\ \dot{C}(t)\, e^{F(t)} + \dot{F}(t)\, C(t)\, e^{F(t)} &= f(t)\, C(t)\, e^{F(t)} + g(t)\\ \dot{C}(t)\, e^{F(t)} &= g(t)\\ C(t) &= \int g(t)\, e^{-F(t)} dt\end{aligned}$$

מכאן קיבלנו כי:

$$x(t) = e^{F(t)} \int g(t)\, e^{-F(t)} dt$$

ניתן להגדיר את הפתרון כאלגוריתם כדלהלן:

1. פותרים את המשד"פ ההומוגנית, כלומר עם $g(t) = 0$.
2. מקבלים פתרון $x(t) = Ce^{\int f(t)dt}$.
3. מציבים את הפתרון במשד"פ המקורית כאשר $C \to C(t)$.
4. פותרים את האינטגרל עבור $C(t)$.
5. מציבים את $C(t)$ חזרה בפתרון $x(t) = C(t)e^{\int f(t)dt}$.

תרגיל 3

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\dot{x} = 2x + t^2$$

פתרון

המשוואה היא משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון, נפתור את המקרה ההומוגני

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x\\ \frac{dx}{dt} &= 2x\\ \int \frac{dx}{x} &= \int 2dt\\ \ln x &= 2t + C\\ x &= Ce^{2t}\end{aligned}$$

כדי לפתור את המשוואה הלא הומוגנית, נבצע וריאציה על הקבוע C כך שהוא תלוי בזמן $C\left(t\right)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} =& 2x+t^{2}\\
\dot{C}\left(t\right)e^{2t}+2C\left(t\right)e^{2t} =& 2C\left(t\right)e^{2t}+t^{2}\\
C(t)=\int t^{2}e^{-2t}dt=&-\frac{t^{2}}{2}e^{-2t}+\int te^{-2t}=-\frac{t^{2}}{2}e^{-2t}-\frac{t}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}\\
=&-\frac{t^{2}}{2}e^{-2t}-\frac{t}{2}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C
\end{aligned}
$$

לכן הפתרון :

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right)&=\left(-\frac{t^{2}}{2}e^{-2t}-\frac{t}{2}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C\right)e^{2t}\\
x\left(t\right)&=-\frac{t^{2}}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{2t}
\end{aligned}
$$

תרגיל 4

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית

$$t\dot{y}+2y=t^{2}-t+1$$

עם תנאי התחלה $y(1)=\frac{1}{2}$

פתרון

תחילה כדאי לנו לחלק ב t על מנת לקבל את הצורה הנוחה

$$\dot{y}=-\frac{2}{t}y+t-1+\frac{1}{t}$$

תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$
\begin{aligned}
\dot{y}&=-\frac{2}{t}y\\
\frac{dy}{y}&=-\frac{2}{t}dt\\
\ln\left(y\right)&=-2\ln\left(t\right)+C\\
y&=Ce^{-2\ln(t)}=\frac{C}{t^{2}}
\end{aligned}
$$

נכתוב $y(t)=C\left(t\right)e^{-2\ln(t)}$ ונציב בחזרה במשוואה, כך ש :

$$\dot{C}(t)\, e^{-2\ln(t)} + (-\frac{2}{t}) C(t)\, e^{-2\ln(t)} = -\frac{2}{t} C(t)\, e^{-2\ln(t)} + t - 1 + \frac{1}{t}$$

$$C(t) = \int \left(t - 1 + \frac{1}{t}\right) e^{2\ln t} dt$$

$$C(t) = \int \left(t - 1 + \frac{1}{t}\right) t^2 dt$$

$$C(t) = \int \left(t^3 - t^2 + t\right) dt$$

$$C(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$$

ולכן קיבלנו

$$y(t) = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C\right) e^{-2\ln t}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}$$

נציב $y(1) = \frac{1}{2}$:

$$y(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C$$

$$\to C = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ומכאן

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$