פתרון עבודה 3 - שדה ודיפול חשמלי

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה 2303

עצמת השדה החשמלי במרחק 4 ס״מ ממטען נקודתי Q היא $900\mathrm{N/C}$. השדה מכוון לכיוון המטען הנ״ל.

1. מהו הסימן של Q?

השדה מכוון לכיוון המטען ולכן אם נקבע את מיקום המטען בראשית, נקבל כי לפי הנוסחה עבור מטען נקודתי:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\hat{r} < 0 \Rightarrow \boxed{Q < 0}$$

2. חשבו את Q (תוצאה מספרית):

$$\left|\vec{E}\right| = k\frac{|Q|}{|\vec{r}|^2} \Rightarrow Q = -\frac{\left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{r}|^2}{k} = -\frac{900\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] \cdot 0.04^2\left[\mathrm{m}^2\right]}{9\cdot 10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]} = \boxed{-1.6\cdot 10^{-10}\,[\mathrm{C}]}$$

3. חשבו את השדה החשמלי במרחק 8 ס״מ מ- Q:

$$\vec{E}\left(r = 8\,[\mathrm{cm}]\right) = -\frac{9\cdot 10^9\left[\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right]\cdot 1.6\cdot 10^{-10}\,[\mathrm{C}]}{0.08^2\,[\mathrm{m}^2]}\hat{r} = \boxed{-225\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

נשים לב שמספיק להשתמש ביחס הבא:

$$\frac{\vec{E}\left(r = 8\,[\mathrm{cm}]\right)}{\vec{E}\left(r = 4\,[\mathrm{cm}]\right)} = \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

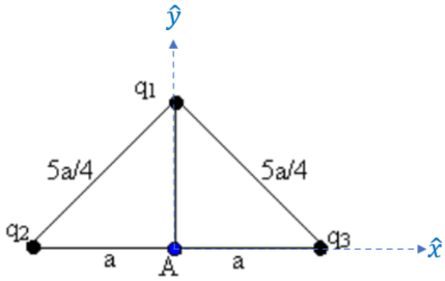
$$\Rightarrow \vec{E}\left(r = 8\,[\mathrm{cm}]\right) = \frac{\vec{E}\left(r = 4\,[\mathrm{cm}]\right)}{4} = -\frac{900}{4}\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] = \boxed{-225\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]}$$

2 שאלה 2300

נתון:

$$q_1 = 9\mu\text{C}\ ;\ q_2 = 72\mu\text{C}\ ;\ q_3 = 36\mu\text{C}\ ;\ a = 2\text{m}$$

נסמן מערכת צירים:



ראשית נחשב את המרחק של הנקודה A מהמטענים: עבור q_2, q_3 המרחק הוא $r_2 = r_3 = a = 2\,[\text{m}]$ ועבור q_1 נשתמש במשפט פיתגורס:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{5a}{4}\right)^2 - a^2} = \frac{3a}{4}\,[\text{m}]$$

כעת אנו יכולים לחשב את השדה בנקודה A הנוצר על ידי כל מטען בנפרד:

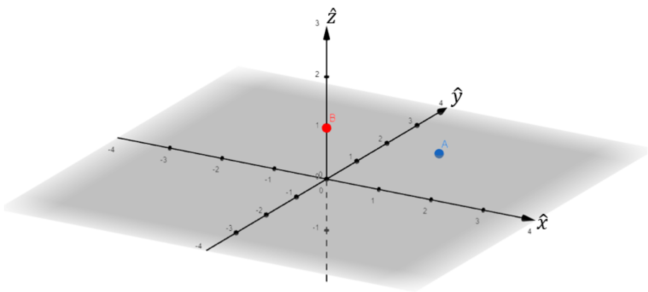
$$\vec{E}_1(A) = \frac{kq_1}{|r_1|^2}\hat{r} = \frac{16kq_1}{9a^2}(-\hat{y})$$
$$\vec{E}_2(A) = \frac{kq_2}{|r_2|^2}\hat{r} = \frac{kq_2}{a^2}(\hat{x})$$
$$\vec{E}_3(A) = \frac{kq_3}{|r_3|^2}\hat{r} = \frac{kq_3}{a^2}(-\hat{x})$$

כך שהשדה הכולל בנקודה A יתקבל על ידי סופרפוזיציה של השדות הנ"ל:

$$\vec{E}(A) = \sum_{n=1}^{3}\vec{E}_n(A) = \frac{k}{a^2}\left[(q_2 - q_3)\hat{x} - \frac{16}{9}q_1\hat{y}\right]$$
$$= \frac{9\cdot 10^9\left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right]}{2^2\,[\text{m}^2]}\left[(72-36)\hat{x} - \frac{16}{9}\cdot 9\hat{y}\right]\cdot 10^{-6}\,[\text{C}] = \boxed{(81, -36)\left[\frac{\text{kN}}{\text{C}}\right]}$$

3 שאלה

נצייר על מערכת צירים:



כאשר $q_A = q$ ו-$q_B = -q$.

1. מהו מומנט הדיפול?

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q\,(1,2,0) + (-q)\,(0,0,1) = \boxed{q\,(1,2,-1)}$$

כעת שמים את הדיפול בתוך שדה חשמלי חיצוני $\vec{E} = E_0\,(2,0,5)$

2. מה היא האנרגיה של הדיפול בשדה הנ"ל?

$$\mathcal{U} = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -qE_0\,(1\cdot 2 + 2\cdot 0 - 1\cdot 5) = \boxed{3qE_0}$$

3. מה הוא מומנט הסיבוב שהשדה מפעיל על הדיפול?

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ q & 2q & -q \\ 2E_0 & 0 & 5E_0 \end{vmatrix}$$
$$= qE_0\left[(2\cdot 5 - (-1)\cdot 0)\,\hat{x} + (-1\cdot 2 - 1\cdot 5)\,\hat{y} + (1\cdot 0 - 2\cdot 2)\,\hat{z}\right]$$
$$= \boxed{qE_0\,(10,-7,-4)}$$

נוסיף מטען $q/2$ ב-$(2,2,2)$.

4. מה הוא מומנט הדיפול כעת?

$$\vec{p}' = \sum_i q_i \vec{r}_i = q\,(1,2,0) + (-q)\,(0,0,1) + \frac{q}{2}\,(2,2,2) = \boxed{q\,(2,3,0)}$$

5. מה היא האנרגיה של הדיפול החדש בשדה החיצוני?

$$\mathcal{U}' = -\vec{p}'\cdot\vec{E} = -qE_0\,(2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 0\cdot 5) = \boxed{-4qE_0}$$

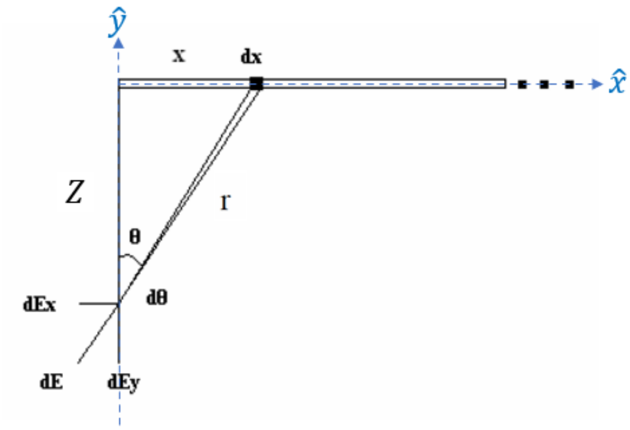
6. מה הוא מומנט הסיבוב של הדיפול החדש?

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2q & 3q & 0 \\ 2E_0 & 0 & 5E_0 \end{vmatrix}$$

$$= qE_0 \left[(3 \cdot 5 - 0 \cdot 0)\, \hat{x} + (0 \cdot 2 - 2 \cdot 5)\, \hat{y} + (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2)\, \hat{z} \right]$$

$$= \boxed{qE_0\, (15, -10, -6)}$$

4 שאלה 2401



המוט טעון באופן אחיד בצפיפות אורכית λ, כך שניתן לרשום את יחידת המטען למקטע קטן לפי $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$. המרחק של הנקודה מכל חתיכת מוט יתקבל לפי פיטגורס:

$$r^2 = x^2 + Z^2$$

מכאן נקבל שהשדה הינו:

$$\vec{E}(P) = \int \frac{k\mathrm{d}q}{r^2}\hat{r} = k\lambda \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+Z^2}\hat{r}$$

נבצע החלפת משתנים מ-x ל-θ באופן הבא:

$$x = Z \cdot \tan\theta\, ;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{d}x = Z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta = \frac{Z}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

ונזכור את הזהות הטריגונומטרית הבאה:

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

כעת נציב לאינטגרל עבור השדה:

$$\vec{E}(P) = k\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{Z}{\cos^2\theta}}{Z^2(1+\tan^2\theta)}\hat{r}\mathrm{d}\theta = k\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2\theta)}{Z(1+\tan^2\theta)}\hat{r}\mathrm{d}\theta = \frac{k\lambda}{Z}\int_0^{\pi/2}\hat{r}\mathrm{d}\theta$$

נפרק לרכיבים קרטזיים (כלומר לרכיב $\hat{x} = -\cos\theta$ ורכיב $\hat{y} = \sin\theta$):

$$E_x(P) = -\frac{k\lambda}{Z}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{k\lambda}{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right] = -\frac{k\lambda}{Z}$$
$$E_y(P) = -\frac{k\lambda}{Z}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{k\lambda}{Z}\left[\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{k\lambda}{Z}$$
$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \boxed{\frac{k\lambda}{Z}(-1,-1)}$$

בצורה אחרת ניתן לרשום שהשדה פועל בזווית:

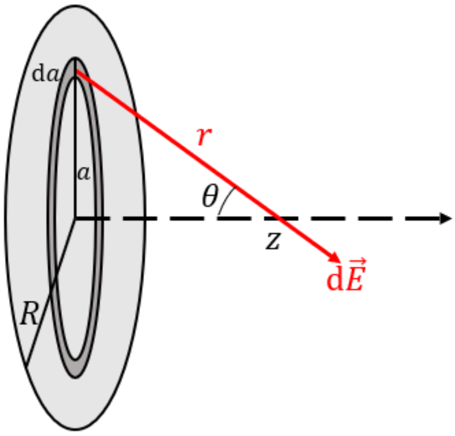
$$\phi_E = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan(1) = 45^{\circ}$$

ובעל גודל:

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{2} \cdot \frac{k\lambda}{Z}$$

5 שאלה 2418

1. חשבו את השדה החשמלי שהדיסקה יוצרת בנקודה הנמצאת במרחק z לאורך ציר הסימטריה של הדיסקה:



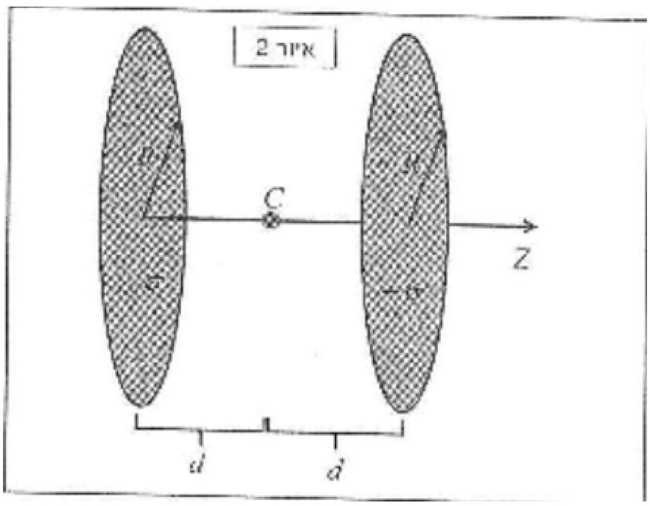
הדיסקה טעונה באופן אחיד ובצפיפות מטען משטחית $\sigma > 0$, כך שנוכל לפרק את מטען הדיסקה לטבעות צרות במרחק a ועובי da מציר הסימטריה, כך שהמטען של כל טבעת יהיה:

$$\mathrm{d}q = 2\pi\sigma a \mathrm{d}a$$

ונוכל לחשב את השדה החשמלי, כאשר אנחנו מתעניינים רק ברכיב ה-$\hat{z}$, כלומר בכיוון $z/r = \cos\theta$:

$$E_z(z) = \int k\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\frac{z}{r} = 2\pi kz\sigma\int_0^R \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}a$$
$$= 2\pi kz\sigma\left[-\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^R \overset{\left\{\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi k}\right\}}{=} \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$$

2. מוסיפים דיסקה נוספת הטעונה בצפיפות מטען $-\sigma$ באופן אחיד במרחק $2d$ ממרכזה של הדסקה הראשונה. חשבו מהו השדה ששתי הדיסקות יוצרות בנקודה C הנמצאת במרכזן:



לפי סימטריה בין הדיסקות (מרחק זהה ומטען הפוך) נקבל שהשדה הכולל יהיה:

$$E_{z,\text{tot}}\left(d\right) = 2E_{z}\left(d\right)$$

כאשר את $E_{z}\left(d\right)$ נחשב לפי התוצאה מהסעיף הקודם, כלומר:

$$E_{z,\text{tot}}\left(d\right) = 4\pi k\sigma\left(1-\frac{d}{\sqrt{R^{2}+d^{2}}}\right) = \boxed{\frac{\sigma}{\varepsilon_{0}}\left(1-\frac{d}{\sqrt{R^{2}+d^{2}}}\right)}$$

3. חשבו את הכוח שיפעל על חלקיק בעל מטען $q<0$ המונח בנקודה C:

מטעמי סימטריה ניתן להראות שהכוח היחיד שלא יתבטל יהיה בכיוון $\hat{z}$, כך שמספיק לנו לחשב:

$$\vec{F} = qE_{z,\text{tot}}\hat{z} = \boxed{\frac{q\sigma}{\varepsilon_{0}}\left(1-\frac{d}{\sqrt{R^{2}+d^{2}}}\right)\hat{z}}$$

כאשר הכוח יפעל **לכיוון שמאל** $\left(-\hat{z}\right)$, עקב הסימן השלילי של מטען החלקיק.