פתרון עבודה 4 - חוק גאוס

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה 3203

1. מטען נקודתי:
נניח שהמטען הנקודתי נמצא בראשית ובעל מטען Q. נבנה מעטפת כדורית מסביב הראשית ברדיוס r, כך שלפי חוק גאוס נקבל:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varepsilon_0 \underbrace{4\pi r^2}_{\text{שטח מעטפת כדור}} E_r\left(r\right) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r} = \boxed{\frac{kQ}{r^2}\hat{r}}$$

2. קליפה כדורית:
במקרה זה נחלק את הפתרון לשני תחומים:

(א) בתוך הקליפה: אין מטען ולכן מחוק גאוס נקבל ישירות שהשדה חייב להתאפס.

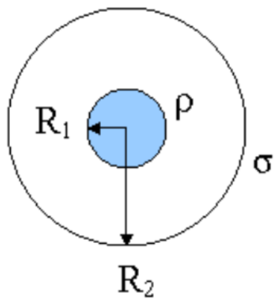
(ב) מחוץ לקליפה: נשתמש שוב במעטפת כדורית מסביב הראשית ברדיוס $r > R$, כך שהיא כן מחילה את המטען ולפי גאוס נקבל את אותו הפתרון כמו בסעיף 1, כלומר:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

בסה"כ נקבל:

$$\boxed{\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \begin{cases} 0 & ,r<R \\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & ,r>R \end{cases}}$$

2 שאלה 3200



נשים לב שלבעיה יש סימטריה ספרית, לכן יהיה לנו קל להשתמש בחוק גאוס עם מעטפות כדוריות. עבור התחום שבו $r < R_1$ נקבל שצפיפות המטען הינה $\rho\left(r\right) = \rho$, ומחוק גאוס בקואורדינטות ספריות נקבל:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 4\pi k \int_0^r \rho\left(r'\right) r'^2 \mathrm{d}r' \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta}_{=2}$$

$$4\pi r^2 E_r = \left(4\pi\right)^2 k\rho \int_0^r r'^2 \mathrm{d}r' = \left(4\pi\right)^2 k\rho \frac{r^3}{3}$$

$$E_r = \frac{4\pi}{3} \rho k \cdot r$$

עבור התחום $R_1 < r < R_2$ נקבל שצפיפות המטען הינה:

$$\rho\left(r\right) = \begin{cases} \rho & , r \le R_1 \\ 0 & , R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

משמע שנקבל:

$$4\pi r^2 E_r = \left(4\pi\right)^2 k\rho \int_0^{R_1} r'^2 \mathrm{d}r' = \left(4\pi\right)^2 k\rho \frac{{R_1}^3}{3}$$

$$E_r = \frac{4\pi}{3} k\rho \frac{{R_1}^3}{r^2}$$

כאשר אם נסמן את המטען הכולל של הכדור ב- $\widetilde{Q} = \frac{4\pi}{3} {R_1}^3 \rho$ נקבל שדה מהצורה של מטען נקודתי.

עבור התחום האחרון, $r > R_2$ נוסיף את הפתרון שקיבלנו עבור קליפה ספרית בסעיף 2 של השאלה הראשונה, רק שנחליף את המטען Q להיות $4\pi {R_2}^2 \sigma$ כי נתונה לנו צפיפות המטען המשטחית של הקליפה. כלומר נקבל שהשדה החשמלי בתחום זה יהיה:

$$E_r = \underbrace{\frac{4\pi}{3} k\rho \frac{{R_1}^3}{r^2}}_{\text{שדה של הכדור}} + \underbrace{4\pi k\sigma \frac{{R_2}^2}{r^2}}_{\text{שדה של הקליפה}} = \frac{4\pi k}{r^2} \left(\frac{{R_1}^3}{3} \rho + {R_2}^2 \sigma \right)$$

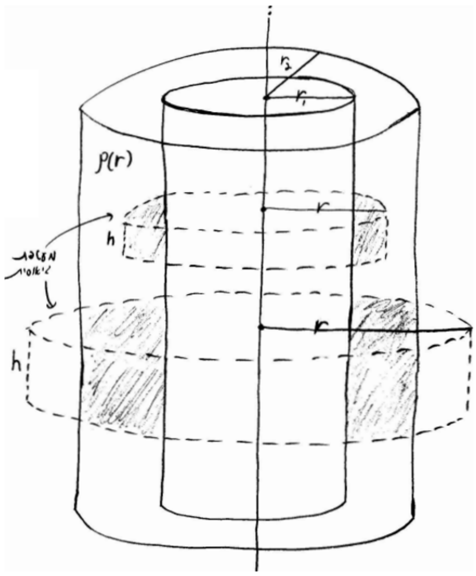
נשים לב שהיחידות מסתדרות לנו, מפני שהיחידות של $\left[\rho\right] = {}^{C}/_{m^3}$ והוא מוכפל ברכיב אורך בשלישית ו- $\left[\sigma\right] = {}^{C}/_{m^2}$ מוכפל ברכיב אורך בריבוע. בסך הכל קיבלנו שהשדה החשמלי הינו:

$$\boxed{\vec{E}\left(\vec{r}\right) = 4\pi k \cdot \hat{r} \cdot \begin{cases} \frac{\rho r}{3} & , r < R_1 \\ \frac{{R_1}^3}{3r^2} \rho & , R_1 < r < R_2 \\ \frac{1}{r^2} \left(\frac{{R_1}^3}{3} \rho + {R_2}^2 \sigma \right) & , R_2 < r \end{cases}}$$

3 שאלה 3306

נתון גליל אינסופי עם רדיוס פנימי r_1 ורדיוס חיצוני r_2 הטעון בצפיפות מטען נפחית אחידה ρ.

1. כתבו ביטוי למטען הכלוא בתוך מעטפת גלילית דמיונית באורך h וברדיוס r ביחס לציר הסימטריה של הגליל:



$$\rho\left(r\right)=\begin{cases}0 & ,r<r_1\\ \rho & ,r_1<r<r_2\\ 0 & ,r_2<r\end{cases}$$

$$Q\left(r,h\right)=\int\limits_0^h \mathrm{d}z\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^r \rho\left(r'\right)r'\mathrm{d}r'=2\pi h\cdot\int\limits_0^r \rho\left(r'\right)r'\mathrm{d}r'$$

$$=\boxed{\pi\rho h\cdot\begin{cases}0 & ,r<r_1\\ \left(r^2-{r_1}^2\right) & ,r_1<r<r_2\\ \left({r_2}^2-{r_1}^2\right) & ,r_2<r\end{cases}}$$

2. חשבו את השדה החשמלי בתחומי המרחב השונים באמצעות חוק גאוס:

מסימטריית הבעיה (גליל אינסופי) השדה החשמלי בכל המרחב הוא בהכרח בכיוון הרדיאלי בלבד, כלומר $\vec{E}=E\hat{r}$. כעת לפי חוק גאוס, כאשר המטען הכלוא הוא המטען שחושב בסעיף הראשון ושטח המעטפת הוא $S=2\pi r\cdot h$ מקבלים:

$$\varepsilon_0\oiint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=2\pi\varepsilon_0 rh\cdot E\left(r\right)\hat{r}=Q\left(r\right)$$

$$\Rightarrow E\left(r\right)\hat{r}=\frac{Q\left(r\right)}{2\pi\varepsilon_0 rh}=\boxed{\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases}0 & ,r<r_1\\ \frac{r^2-{r_1}^2}{r} & ,r_1<r<r_2\\ \frac{{r_2}^2-{r_1}^2}{r} & ,r_2<r\end{cases}}$$

3. הראו שאם מניחים כי המערכת מורכבת מגליל מלא עם רדיוס r_2 וצפיפות מטען ρ, אשר בתוכו גליל מלא עם רדיוס r_1 וצפיפות מטען הפוכה בסימן $-\rho$, מתקבל בכל תחומי המרחב שדה חשמלי הזהה לחישוב מן הסעיף הקודם:

לפי חוק גאוס לגליל אינסופי עם רדיוס R וצפיפות מטען נפחית ρ מקבלים את השדה החשמלי הבא:

$$\vec{E}(r) = E(r)\hat{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} r & ,r<R \\ \frac{R^2}{r} & ,R<r \end{cases}$$

כעת במערכת שלנו נוכל לחשב את השדה הכולל כסופרפוזיציה של שני הגלילים:

$$E_1(r)\hat{r} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} r & ,r<r_1 \\ \frac{{r_1}^2}{r} & ,r_1<r \end{cases}$$

$$E_2(r)\hat{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} r & ,r<r_2 \\ \frac{{r_2}^2}{r} & ,r_2<r \end{cases}$$

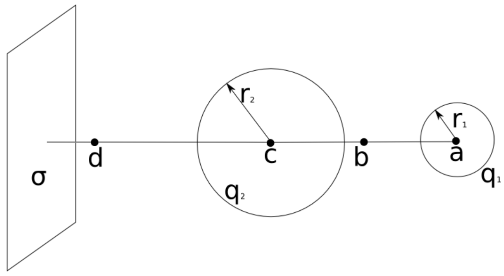
$$\Rightarrow E_{\text{tot}}(r)\hat{r} = E_1(r) + E_2(r) =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} -r+r & ,r<r_1 \\ -\frac{{r_1}^2}{r}+r & ,r_1<r<r_2 \\ -\frac{{r_1}^2}{r}+\frac{{r_2}^2}{r} & ,r_2<r \end{cases}$$

$$= \boxed{\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} 0 & ,r<r_1 \\ \frac{r^2-{r_1}^2}{r} & ,r_1<r<r_2 \\ \frac{{r_2}^2-{r_1}^2}{r} & ,r_2<r \end{cases}}$$

*בתרגול 5 ראינו דוגמה דומה עבור משטח אינסופי וחור באמצע.

4 שאלה 3500



המערכת מורכבת משלושה דברים שאנחנו מכירים : שתי קליפות ומשטח אינסופי, כאשר אנחנו הולכים להשתמש בעקרון הסופרפוזיציה.
נקבע מערכת צירים כך ש- x הולך ימינה.
נתחיל מהפשוט היותר, המשטח האינסופי :

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma\hat{x}$$

וזה קבוע בכל חצי המרחב שמימין למשטח.
את השדה מהקליפות נחשב בנפרד עבור כל נקודה, כאשר נזכור כי :

$$\vec{E}_{\text{sphere}}(r) = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \frac{kq}{r^2}\hat{r} & , r > R \end{cases}$$

1. בנקודה a השדה של הקליפה הימנית מתאפס, ויש רק שדה מהקיר ומהקליפה השמאלית :

$$\boxed{\vec{E}(a) = \left(2\pi k\sigma + \frac{kq_2}{L^2}\right)\hat{x}}$$

2. בנקודה b יש שדות משתי הקליפות ומהקיר (הקליפה הימנית :

$$\vec{E}(b) = 2\pi k\sigma\hat{x} + \frac{kq_1}{\left(L/2\right)^2}(-\hat{x}) + \frac{kq_2}{\left(L/2\right)^2}\hat{x} = \boxed{\left[2\pi k\sigma + \frac{4k}{L^2}(q_2 - q_1)\right]\hat{x}}$$

*שימו לב לכיוונים של השדה.

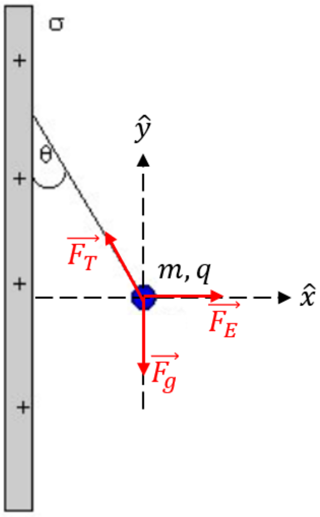
3. בנקודה c אין שדה מהקליפה בה הוא נמצא, אלא רק מהקיר ומהקליפה הימנית :

$$\boxed{\vec{E}(a) = \left(2\pi k\sigma - \frac{kq_1}{L^2}\right)\hat{x}}$$

4. בנקודה d שתי הקליפות מפעילות שדה שמאלה :

$$\vec{E}(d) = 2\pi k\sigma\hat{x} + \frac{kq_1}{L^2}(-\hat{x}) + \frac{kq_2}{(2L)^2}\hat{x} = \boxed{\left[2\pi k\sigma - \frac{k}{4L^2}(4q_2 + q_1)\right]\hat{x}}$$

5 שאלה 3407



הכדור נמצא בשיווי משקל, כלומר $\vec{F} = 0$ $\sum$, כאשר הכוחות הפועלים עליו הם:

1. כוח הכובד: $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$.
2. מתיחות החוט: $\vec{F}_T = T\left(\cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{x}\right)$.
3. כוח קולון מהלוח הטעון: $\vec{F}_E = q\vec{E} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$, כאשר השתמשנו בשדה של לוח אינסופי טעון אחיד $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$, כמו שראינו בתרגול 5.

כעת נוכל לכתוב את מאזן הכוחות:

$$F_x = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - T\sin\theta = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0}{q}\cdot T\sin\theta$$
$$F_y = T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$
$$\Rightarrow \sigma = \boxed{\frac{2\varepsilon_0 mg}{q}\tan\theta}$$

נציב את הנתונים:

$$m = 1\,[\mathrm{mg}]\ ;\ \theta = \frac{\pi}{6}\,[\mathrm{rad}]\ ;\ q = 2\cdot 10^{-8}\,[\mathrm{C}]\ ;\ \varepsilon_0 \simeq 8.85\cdot 10^{-12}\left[\frac{\mathrm{s^2\cdot C^2}}{\mathrm{m^3\cdot kg}}\right]\ ;\ g \simeq 9.8\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\left[\frac{\cancel{\mathrm{s^2}}\cdot \cancel{\mathrm{C^2}}^{\,\mathrm{C}}}{\cancel{\mathrm{m^3}}^{\,\mathrm{m^2}}\cdot\cancel{\mathrm{kg}}}\right]\cdot 10^{-6}\left[\cancel{\mathrm{kg}}\right]\cdot 9.8\left[\cancel{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}\right]}{2\cdot 10^{-8}\left[\cancel{\mathrm{C}}\right]}\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{5\cdot 10^{-9}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}\right]}$$