Free particle in a potential well a:
$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} sin(\frac{n\pi}{a}x), E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.
And initial state :
$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{2b}{a}x & for: 0 < x < \frac{a}{2} \\ 2b - \frac{2b}{a}x & for: \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$

# 1

$1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\Psi = \int_0^{a/2} \frac{4b^2}{a^2}x^2dx + \int_{a/2}^{a}(2b - \frac{2b}{a}x)^2dx$
$= \int_0^{a/2} \frac{4b^2}{a^2}x^2dx + \int_{a/2}^{a} 4b^2dx - \int_{a/2}^{a} \frac{8b^2}{a}xdx + \int_{a/2}^{a} \frac{4b^2}{a^2}x^2dx$
$= \frac{4b^2}{3a^2}x^3\Big|_0^{\frac{a}{2}} + 4b^2x\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} - \frac{8b^2}{2a}x^2\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} + \frac{4b^2}{3a^2}x^3\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{b^2a}{3}$
so b=$\sqrt{\frac{3}{a}}$

# 2

lets write $\Psi$ as a sum over all the eigenstate $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$.
$c_n =< \phi_n|\psi >= \int_0^a \phi_n^*(x)\psi(x)dx = \int_0^{a/2} \frac{2b}{a}x\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx + \int_{a/2}^{a}(2b - \frac{2b}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2n^2}sin(\frac{\pi n}{2})$

So we get $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sqrt{3}}{n^2\pi^2\sqrt{a}}\sin(\frac{n\pi}{2})sin(\frac{n\pi}{a}x)$
$= \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}[\phi_1 - \frac{1}{3^2}\phi_3 + \frac{1}{5^2}\phi_5 + ...]$
The probability to measure the energy $E_n$ is $|c_n|^2$ .
$P(E_2) = P(E_4) = 0$
$P(E_1) = (\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2})^2 \approx 0.9855$
$P(E_3) = (\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2(-3)^2})^2 \approx 0.0121$
$P(E_5) = (\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2(5)^2})^2 \approx 1.57 \times 10^{-3}$

# 3

$< E >= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)E_n = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2E_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})|^2 \times \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{48\hbar^2}{\pi^2ma^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\frac{n\pi}{2})|^2}{n^2} = \frac{48\hbar^2}{\pi^2ma^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{48\hbar^2}{\pi^2ma^2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{6\hbar^2}{ma^2}$

## מחסום ריבועי

נתון מחסום פוטנציאל המוגדר ע"י: $V(x)\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & 0<x<L\\ 0 & L<x\end{cases}$

חלקיק במסה $m$ הנע משמאל לימין מגיע למחסום.

א. הראה כי $e^{ikx}$ נע ימינה ו $e^{-ikx}$ נע שמאלה.

ב. איך נראית פונקציית הגל בכל תחום באנרגיה נמוכה מגובה המחסום?

ג. השתמש בתנאי השפה לקבלת סט משוואות סגורות המתארות את הקבועים של הבעיה (אין צורך לפתור).

ד. הראה שכאשר האקספוננט החיובי באיזור המחסום זניח סיכוי המנהור הוא קטן, מה התנאים לכך? מה הסיכוי למנהור במקרה כזה? נתון כי סיכוי המנהור הוא $T\sim\frac{|\psi(L)|^2}{|\psi(0)|^2}$.

## פתרון

א. הפתרון המלא למשוואת שרדינגר הינו $\psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$ ולכן
אם $\psi(x)=e^{ikx}$ אז הפתרון המלא יהיה $e^{-i(\omega t-kx)}$, גל שנע ימינה.
אם$\psi(x)=e^{-ikx}$ אז הפתרון המלא יהיה $e^{-i(\omega t+kx)}$, גל שנע שמאלה.

ב. נגדיר $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו $\alpha=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.
בתחום $x<0$ נקבל את המשוואה $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=-k^2\psi(x)$ שפתרונה
$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ (גל התחלתי שנע ימינה וגל מוחזר שנע שמאלה)
בתחום $0<x<L$ נקבל את המשוואה $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=\alpha\psi(x)$שפתרונה
$\psi(x)=Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x}$
בתחום $L<x$ נקבל את אותה המשוואה כמו בתחום $x<0$ ולכן הפתרון
$\psi(x)=Fe^{ikx}$ (יש רק גל שנע ימינה כי הגל ההתחלתי נע ימינה)

ג. תנאי השפה הינם רציפות פונקציית הגל ונגזרתה בכל מעבר.
מרציפות פונקצייה נקבל:
ב$x=0$

$$A+B=C+D \tag{1}$$

ב$x=L$

$$Ce^{\alpha L}+De^{-\alpha L}=Fe^{ikL} \tag{2}$$

מרציפות נגזרת נקבל:
ב$x=0$

$$ikA-ikB=\alpha C-\alpha D \tag{3}$$

ב$x=L$

הערה: ניתן לנרמל פונקציית הגל בנפח אינסופי אך באופן אינו טריוואלי,
כך שניתן להניח נפח סופי, לבצע את החישובים, ובסוף להשאיפו לאינסוף.

$$\alpha Ce^{\alpha L}-\alpha De^{-\alpha L}=ikFe^{ikL} \tag{4}$$

ד. את התנאים לכך שהאקספוננט החיובי באיזור המחסום זניח, כלומר $|C|\ll|D|$ בסימונים שלנו, נקבל מהמשוואות שמצאנו בסעיף הקודם.
נציב את משוואה (2) ב (4):

$$\alpha Ce^{\alpha L}-\alpha De^{-\alpha L}=ikCe^{\alpha L}+ikDe^{-\alpha L}\Rightarrow$$

$$C\left[\alpha e^{\alpha L}-ike^{\alpha L}\right]=D\left[ike^{-\alpha L}+\alpha e^{-\alpha L}\right]\Rightarrow$$

$$C=De^{-2\alpha L}\left(\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right)\Rightarrow|C|=|D|\,e^{-2\alpha L}\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|$$

נחשב את $\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|$:

$$\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}=\frac{(\alpha+ik)^2}{(\alpha-ik)(\alpha+ik)}=\frac{\alpha^2-k^2+2ik\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

ולכן

$$\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|=\frac{\sqrt{\left(\alpha^2-k^2\right)^2+4k^2\alpha^2}}{\alpha^2+k^2}=\frac{\sqrt{\alpha^4+k^4+2k^2\alpha^2}}{\alpha^2+k^2}=\frac{\sqrt{\left(\alpha^2+k^2\right)^2}}{\alpha^2+k^2}=1$$

נקבל:

$$|C|=|D|\,e^{-2\alpha L}$$

והתנאי לכך ש $|C|\ll|D|$ הינו $e^{-2\alpha L}\ll 1$ כלומר $L\gg\frac{1}{2\alpha}=\frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0-E)}}$.
במקרה זה פונקציית הגל באיזור המחסום היא $\psi(x)\approx De^{-\alpha x}$

הסיכוי למנהור במקרה זה:

$$T\sim\frac{\left|\psi\left(L\right)\right|^{2}}{\left|\psi\left(0\right)\right|^{2}}=\frac{\left|De^{-\alpha L}\right|^{2}}{\left|D\right|^{2}}=e^{-2\alpha L}\ll1$$

כלומר, סיכוי המנהור אכן קטן מאוד במקרה זה.