פתרון עבודה 5 - פוטנציאל חשמלי וחוק גאוס

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה 3302

חשבו, באמצעות חוק גאוס, את השדה החשמלי במרחק R מתיל אינסופי הטעון בצפיפות מטען אחידה λ:

נבנה מעטפת גלילית מסביב לחתיכה של התיל באורך h, כך שציר הסימטריה של הגליל מתלכד עם התיל:

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_{\text{in}}$$

$$\varepsilon_0 E_r \underbrace{2\pi r h}_{\text{שטח מעטפת גליל}} = \int_0^h \lambda \mathrm{d}z = \lambda h$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \overset{\{4\pi k = 1/\varepsilon_0\}}{=} \boxed{\frac{2k\lambda}{r}}$$

2 שאלה 3206

שתי קליפות כדוריות (שוות מרכז) בעלות רדיוסים R_1, R_2 טעונות במטענים Q_1, Q_2 בהתאמה.

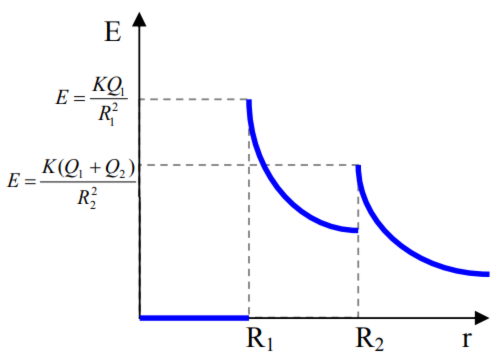
1. על מנת לחשב את השדה במרחב, נחלק אותו לשלושה תחומים ונשתמש בחוק גאוס, כאשר עבור השטף נקבל:

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{שטח מעטפת כדור}} \varepsilon_0 E_r = \frac{E_r \cdot r^2}{k}$$

וכעת לפי התחומים נשווה למטען הכלוא בתחום כל מעטפת:

$$q(r) = \begin{cases} 0 & , r < R_1 \\ Q_1 & , R_1 < r < R_2 \\ Q_1 + Q_2 & , R_2 < r \end{cases} \Rightarrow E_r(r) = \boxed{\begin{cases} 0 & , r < R_1 \\ \frac{kQ_1}{r^2} & , R_1 < r < R_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2} & , R_2 < r \end{cases}}$$

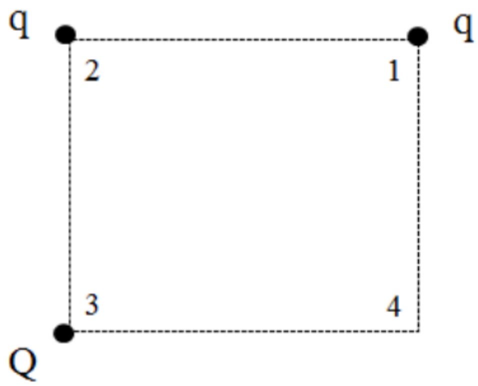
2. גרף עוצמת השדה יהיה:



3. כדי לחשב את האנרגיה להעביר אלקטרון מפני הקליפה החיצונית לאינסוף נשתמש בנוסחה לעבודה:

$$W=\int_{R_2}^{\infty}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_2}^{\infty}e\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_2}^{\infty}e\frac{k\left(Q_1+Q_2\right)}{r^2}\mathrm{d}r$$
$$=e\left(Q_1+Q_2\right)k\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{\infty}=\boxed{\frac{e\left(Q_1+Q_2\right)k}{R_2}}$$

3 שאלה 4100



1. נחשב את האנרגיה באמצעות הנוסחה למערכת של מטענים נקודתיים (אורך צלע הריבוע a):

$$U=\sum_{i\neq j}k\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=k\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}\right]$$
$$=\frac{kq}{a}\left[q+\frac{Q}{\sqrt{2}}+q\right]=\boxed{\frac{kq}{a}\left[2q+\frac{\sqrt{2}}{2}Q\right]}$$

2. ראשית נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של המצב החדש:

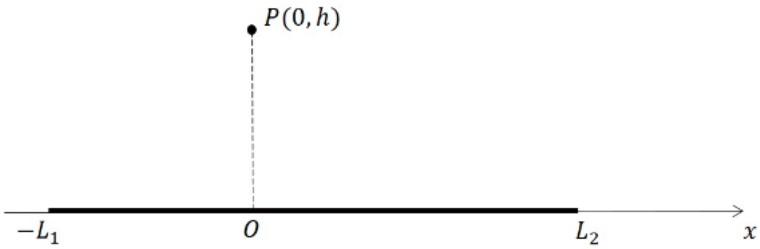
$$U'=k\left[\frac{q_2q_4}{r_{24}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_3q_4}{r_{34}}\right]=\frac{kq}{a}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)q+Q\right]$$

ונתון שהעבודה לעבור בין המצבים היא אפס, כלומר:

$$W=U'-U=0$$
$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)q+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Q=0\Rightarrow\boxed{q=Q}$$

וניתן היה להסיק שזו התשובה מטעמי סימטריה של הבעיה.

4 שאלה 4311



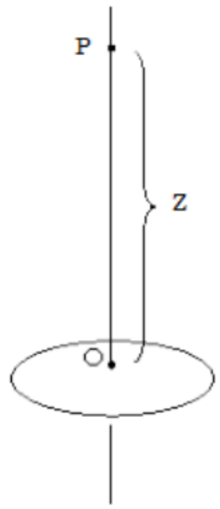
נזכור שפוטנציאל של מטען נקודתי הוא $V=\frac{kq}{r}$. כעת נחלק את המטען של התיל לרצף של מטענים נקודתיים $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ ונסכום לאורך התיל, כאשר אלמנט האורך יקבע לפי:

$$|\vec{r}_P-\vec{r}_{\mathrm{d}q}|=\sqrt{x^2+h^2}$$
$$\vec{r}_P=(0,h)\ ;\ \vec{r}_{\mathrm{d}q}=(x,0)$$

כך שנקבל:

$$\begin{aligned}V&=\int_{-L_1}^{L_2}\frac{k\lambda}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x\overset{\{u\equiv x/h\}}{=}k\lambda\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{d}u\\&=k\lambda\left[\ln\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)\right]=k\lambda\left[\ln\left(h\sqrt{x^2+h^2}+hx\right)\right]_{-L_1}^{L_2}\\&=\boxed{k\lambda\ln\left(\frac{\sqrt{{L_2}^2+h^2}+L_2}{\sqrt{{L_1}^2+h^2}-L_1}\right)}\end{aligned}$$

5 שאלה 4306



1. עבור הפוטנציאל נפתור באותה שיטה של שאלה 4, כאשר במקרה של טבעת אלמנט המטען יהיה:

$$\mathrm{d}q = \lambda R \mathrm{d}\varphi \overset{\{\lambda = Q/2\pi R\}}{=} \frac{Q}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

והמרחק מכל אלמנט מטען לנקודה P יהיה:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mathrm{d}q} &= (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \; ; \; \vec{r}_P = (0,0,z) \\ r &= |\vec{r}_{\mathrm{d}q} - \vec{r}_P| = \sqrt{R^2+z^2} \end{aligned}$$

כך שנקבל את הפוטנציאל:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{kQ}{2\pi\sqrt{R^2+z^2}}\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$

2. העבודה הנדרשת להעביר מטען q מהנקודה P לראשית (נקודה O) תתקבל לפי:

$$W = q\left(V_O - V_P\right) = q\left[V\left(0\right) - V\left(z\right)\right] = \boxed{kqQ\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]}$$

3. את השדה החשמלי בנקודה P נקבל על ידי גזירת הפוטנציאל בכיוון השדה (מסימטריה ניתן לקבל שזה $\hat{z}$):

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V\left(z\right)}{\mathrm{d}z}\hat{z} = \boxed{\frac{kQz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}}$$