שדות וקטוריים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

שדות סקלריים ושדות וקטוריים

שדה הוא כינוי לפונקציה שהקלט שלה הוא נקודה במרחב. אם הפונקציה מחזירה סקלר בכל נקודה, $f(\vec{r})$, היא נקראת **שדה סקלרי**, וכבר עסקנו בפונקציות כאלה. אם הפונקציה מחזירה וקטור בכל נקודה, $\vec{F}(\vec{r})$, זהו **שדה וקטורי**.

נוכל לרשום שדה וקטורי כך:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = (F_x(x,y,z),\ F_y(x,y,z),\ F_z(x,y,z)) \tag{1}$$

דוגמה לשדה וקטורי:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2,\ z+xy,\ z^2) \tag{2}$$

למשל, בנקודה $(1,2,-1)$ הוא נותן את הווקטור:

$$\vec{F}(1,2,-1) = (5,1,1) \tag{3}$$

גזירה של שדה וקטורי: הדיברגנץ והרוטור

נזכיר את אופרטור הנבלה

$$\vec{\nabla} = (\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z) \tag{4}$$

שכבר נתקלנו בו בגזירת שדה סקלרי: הפעלתו על שדה סקלרי $f(\vec{r})$ מגדירה את הגרדיאנט

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = (\partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f) \tag{5}$$

דרך אגב, הגרדיאנט של שדה סקלרי הוא שדה וקטורי.

ניתן לגזור שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ ולקבל שדה סקלרי באמצעות ה**דיברגנץ** **(divergence)**:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \partial_i F_i(\vec{r}) = \partial_x F_x(\vec{r}) + \partial_y F_y(\vec{r}) + \partial_z F_z(\vec{r}) \tag{6}$$

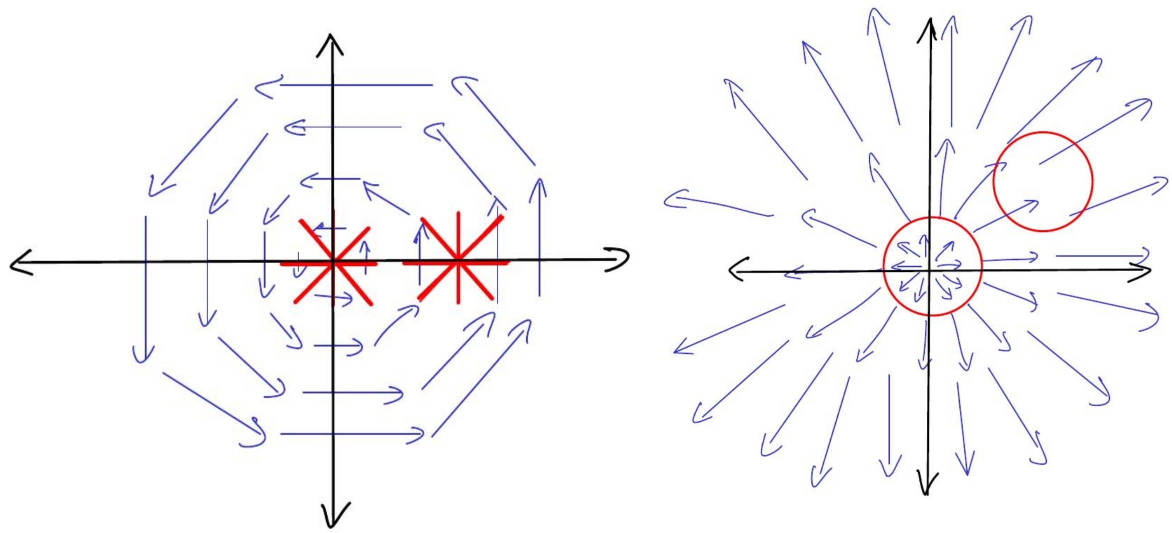
ניתן לגזור שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ ולקבל שדה וקטורי באמצעות ה**רוטור** **(curl)**:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \epsilon_{ijk}\partial_j F_k(\vec{r})\hat{e}_i = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x(\vec{r}) & F_y(\vec{r}) & F_z(\vec{r}) \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$= \hat{x}\left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) + \hat{y}\left(\partial_z F_x - \partial_x F_z\right) + \hat{z}\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) \tag{8}$$

$$= (\partial_y F_z - \partial_z F_y,\ \partial_z F_x - \partial_x F_z,\ \partial_x F_y - \partial_y F_x) \tag{9}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.



איור 1: **ימין**: שדה עם דיברגנץ. משני המעגלים יוצא שטף סופי.
שמאל: שדה עם רוטור. שני הגלגלים יסתובבו נגד כיוון השעון.

דוגמה מפיזיקה: משוואות מקסוול

הדיברגנץ והרוטור מופיעים בהרבה הקשרים בפיזיקה. דוגמה אחת היא משוואות מקסוול (Maxwell's equations), שבאמצעותן ניתן לתאר את כל האלקטרומגנטיות, כלומר את התנהגות השדה החשמלי $\vec{E}(\vec{r},t)$ והשדה המגנטי $\vec{B}(\vec{r},t)$ כפונקציה של מרחב וזמן:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{11}$$

כאשר $\rho(\vec{r},t)$ היא צפיפות המטען החשמלי, $\vec{J}(\vec{r},t)$ היא צפיפות הזרם החשמלי, ו־ε_0 ו־μ_0 הם קבועים ידועים. ממשוואות אלה ניתן לקבל את חוק קולון, חוק אמפר וכו' באמצעות הכלים שנלמד בפרק זה.

תמונה אינטואיטיבית של הדיברגנץ והרוטור

כפי שנבין בצורה יותר מדויקת בהמשך הפרק, אם השדה מתאר, למשל, את המהירות של נוזל בלתי־דחיס בכל נקודה במרחב, $\vec{v}(\vec{r})$, אז:

- הדיברגנץ יתאר את שטף הנוזל הבוקע החוצה מתוך נפח אינפיניטסימלי מסביב לנקודה (פחות השטף החודר פנימה אל תוך הנפח). אם הדיברגנץ חיובי, נגיד שקיים **מקור** (source) בתוך הנפח, ואם הדיברגנץ שלילי, נגיד שקיים בו **בור** (sink). קל

לראות זאת למשל בדוגמה שבה מהירות הנוזל היא בכיוון $\hat{x}$ בלבד, אז הדיברגנץ $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \partial_x v_x(\vec{r})$. אם $\partial_x v_x(\vec{r}) > 0$, כלומר מהירות הנוזל גדלה עם x, אז המהירות שבה נוזל יוצא מהנפח בצידו הימני גדולה מהמהירות שבה נוזל נכנס לנפח מצידו השמאלי, לכן חייב להיות בתוך הנפח מקור שיוצר נוזל.

- הרוטור יתאר את ה**מערבולתיות** של הנוזל: אם נשים גלגל־כפות קטן בתוך הנוזל, קיום של רכיב רוטור מקביל לציר הגלגל יגרום לגלגל להסתובב. בתור דוגמה, נניח שמהירות הנוזל היא בכיוון $\hat{x}$ בלבד, והערך שלה גדל עם y, כלומר $\partial_y v_x(\vec{r}) > 0$. במקרה כזה נקבל $[\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})]_z = -\partial_y v_x(\vec{r}) \neq 0$, ואכן נצפה שגלגל־כפות שצירו מקביל לציר ה־z יסתובב בכיוון השעון במישור xy מפני שמהירות הנוזל (ימינה) בחלק העליון שלו תהיה גדולה יותר מאשר בחלק התחתון.

עם הבנות אלה, נסתכל שוב על משוואות מקסוול (משוואות (10)-(11)). המשוואה עבור $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ אומרת שמטען חשמלי הוא מקור לשדה חשמלי (כמו בחוק קולון). המשוואה עבור $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ אומרת שאין מטענים מגנטיים. המשוואה עבור $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ אומרת ששדה מגנטי המשתנה בזמן יוצר שדה חשמלי מעגלי (חוק פאראדיי). והמשוואה עבור $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ אומרת שזרם חשמלי יוצר שדה מגנטי מעגלי סביבו (חוק אמפר), וכך גם שדה חשמלי המשתנה בזמן (זרם ההעתקה).

נגדיר שהשדה $\vec{F}(\vec{r})$ הוא **חסר־מקורות (source-free)** אם הדיברגנץ בכל נקודה מתאפס. נגדיר שהשדה $\vec{F}(\vec{r})$ הוא **לא־סיבובי (irrotational)**, או **חסר־מערבולות**, אם הרוטור בכל נקודה מתאפס.

דוגמאות

נסתכל על שלוש דוגמאות של שדות, המוצגות גם באיור 2:

1. נתון השדה הווקטורי $\vec{F}_1 = \frac{1}{2}(x, y, 0)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = \frac{1}{2}\left(\partial_x x + \partial_y y\right) = 1 \tag{12}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \frac{1}{2}(\partial_y x - \partial_x y)\hat{z} = 0 \tag{13}$$

זהו השדה לא־סיבובי.

2. נתון השדה הווקטורי $\vec{F}_2 = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = \frac{1}{2}\left[\partial_x(-y) + \partial_y x\right] = 0 \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \frac{1}{2}\left[\partial_x x - \partial_y(-y)\right]\hat{z} = \hat{z} \tag{15}$$

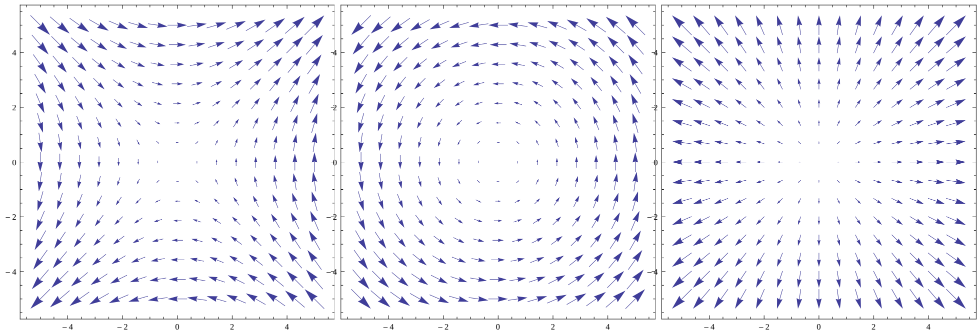
זהו שדה חסר־מקורות.

3. נתון השדה הווקטורי $\vec{F}_3 = \frac{1}{2}(y, x, 0)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\left(\partial_x y + \partial_y x\right) = 0 \tag{16}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\left(\partial_x x - \partial_y y\right)\hat{z} = 0 \tag{17}$$

זהו שדה חסר־מקורות ולא־סיבובי.



איור 2: **ימין:** שדה לא־סיבובי $\vec{F}_1=\frac{1}{2}(x,y,0)$,
מרכז: שדה חסר־מקורות $\vec{F}_2=\frac{1}{2}(-y,x,0)$,
שמאל: שדה חסר־מקורות ולא־סיבובי $\vec{F}_3=\frac{1}{2}(y,x,0)$.

שדה משמר והפוטנציאל הסקלרי

שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ נקרא **משמר** אם קיימת פונקציה $\phi(\vec{r})$ כך ש־

$$\vec{F}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \tag{18}$$

הפונקציה $\phi(\vec{r})$ נקראת **הפוטנציאל הסקלרי** של השדה הווקטורי.

דוגמה: השדה $\vec{F}_1=\frac{1}{2}(x,y,0)$ הוא משמר: הפוטנציאל הסקלרי הוא

$$\phi(\vec{r})=-\frac{1}{4}(x^2+y^2) \tag{19}$$

כפי שניתן לבדוק:

$$\vec{F}_1=-\vec{\nabla}\left[-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}(x,y,0) \tag{20}$$

משפט: כל שדה וקטורי משמר הוא לא־סיבובי.
הוכחה:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=-\epsilon_{ijk}\hat{e}_i\partial_j(\vec{\nabla}\phi)_k=-\epsilon_{ijk}\hat{e}_i\partial_j\partial_k\phi=0 \tag{21}$$

הביטוי מתאפס כי $\partial_j\partial_k\phi$ סימטרי תחת החלפת האינדקסים $k\leftrightarrow j$, בעוד ש־ϵ_{ijk} אנטי־סימטרי, ולכן הביטוי כולו אנטי־סימטרי תחת $k\leftrightarrow j$, כך שאחרי הסכימה על אינדקסים אלה נקבל 0. ניתן להראות זאת גם כך:

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi=\frac{1}{2}\left(\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k+\epsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\right)\phi=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(\partial_j\partial_k-\partial_k\partial_j\right)\phi=0 \tag{22}$$

כאן, בשלב הראשון פיצלנו את הביטוי לשני חלקים שווים וביצענו החלפת שמות אינדקסים $k\leftrightarrow j$ באיבר השני. בשלב השני השתמשנו באנטיסימטריות של סימן לוי־צ'יוויטה.

בהמשך נראה שבדרך כלל המשפט נכון גם בכיוון ההפוך: שדה וקטורי לא־סיבובי הוא משמר.

פוטנציאל וקטורי

אם עבור שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ קיים שדה וקטורי $\vec{A}(\vec{r})$ כך שמתקיים

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{23}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ נקרא **הפוטנציאל הווקטורי** של $\vec{F}(\vec{r})$.

דוגמה: לשדה $\vec{F}_2 = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$ קיים הפוטנציאל הווקטורי

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\hat{z} \tag{24}$$

כפי שניתן לבדוק:

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla} \times \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\hat{z}\right] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$= -\frac{y}{2}\hat{x} + \frac{x}{2}\hat{y} = \frac{1}{2}(-y, x, 0) \tag{26}$$

משפט: כל שדה $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ הוא חסר־מקורות.
הוכחה:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_i(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \partial_i\left(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k\right) = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \tag{27}$$

כאשר השתמשנו בשיקולי סימטריות ואנטי־סימטריות תחת החלפת אינדקסים כמו ב־(21).

ניתן להראות שבדרך כלל המשפט נכון גם בכיוון ההפוך: לשדה חסר־מקורות קיים פוטנציאל וקטורי.

אינטגרל מסלולי של שדה וקטורי

האינטגרל המסלולי של שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ לאורך עקומה C הוא

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{28}$$

כאשר $d\vec{r}$ הוא אלמנט אורך (וקטורי) על העקומה.

דוגמה פיזיקלית: אם גוף עובר במסלול C ו־$\vec{F}(\vec{r})$ מסמן את הכוח המופעל עליו כשהוא עובר בנקודה $\vec{r}$, אז האינטגרל נותן את העבודה הנעשית על הגוף.

אינטגרל מסלולי של שדה וקטורי משמר

עבור שדה משמר, $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$, מתקיים (כאשר C מתחילה ב־$\vec{r}_i$ ומסתיימת ב־$\vec{r}_f$)

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C d\phi = -(\phi(\vec{r}_f) - \phi(\vec{r}_i)) \tag{29}$$

נשים לב שהתוצאה תלויה רק בנקודות ההתחלה והסיום ולא במסלול ביניהן.
עבור אינטגרל מסלולי סגור ($\vec{r}_f = \vec{r}_i$)

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(\phi(\vec{r}_i) - \phi(\vec{r}_i)) = 0 \tag{30}$$

חישוב אינטגרלים מסלוליים

איך נחשב אינטגרלים מסלוליים בפועל? נרצה לרשום את הביטוי

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \left[F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz\right] \tag{31}$$

במונחים של אינטגרל על משתנה יחיד. זה אמור להיות אפשרי מכיוון שהעקומה היא חד־מימדית.

לפעמים נוכל לתאר את העקומה באמצעות רישום שתיים מהקואורדינטות כפונקציה של הקואורדינטה השלישית. למשל, עקומה יכולה להיות מתוארת ע"י $y(x)$ ו־$z(x)$ נתונים. במקרה כזה האינטגרל הופך ל־

$$\int_{x_i}^{x_f} \left[F_x(x,y(x),z(x)) + F_y(x,y(x),z(x))\,y'(x) + F_z(x,y(x),z(x))\,z'(x)\right] dx \tag{32}$$

וניתן לחשב אותו ישירות.

במקרים רבים תיאור העקומה בצורה כזאת איננו אפשרי (למשל אם העקומה עוברת מספר פעמים באותו ערך של x) או לא נוח. במקום זאת, כפי שלמדנו בפרק הקודם, ניתן לתאר את העקומה באמצעות ציון הקואורדינטות שלה כפונקציה של פרמטר כלשהו הגדל באופן מונוטוני לאורך העקומה. פרמטריזציה כזאת מופיעה באופן טבעי כשהעקומה מתארת תנועה של חלקיק במרחב, למשל. במקרה כזה ניתן לתאר את העקומה באמצעות ציון הקואורדינטות של החלקיק כתלות בזמן t. כאשר $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ידועים, ניתן לרשום את האינטגרל (31) כ־

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\,dt =$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[F_x(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + F_y(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + F_z(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\right] dt \tag{33}$$

נדגיש עם זאת, שהפרמטר t אינו חייב להיות זמן (או גודל פיזיקלי אחר כלשהו). בפרט, הרבה פעמים בהקשרים פיזיקליים השדה הווקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ משתנה עם הזמן ואנחנו נרצה לחשב את כל האינטגרל בנקודת זמן אחת, ואז לא נוכל לשלוח חלקיק לעבור בשבילנו לאורך העקומה. נשים לב שעל אף שבחירת הפרמטריזציה של עקומה נתונה איננה יחידה כי ניתן להחליף פרמטר t נתון בפונקציה מונוטונית של t, נגיד $T(t)$, תוצאת האינטגרל המסלולי לא תהיה תלויה בבחירת הפרמטריזציה מכיוון ש־

$$\frac{d\vec{r}(T)}{dT}\,dT = \frac{d\vec{r}(t(T))}{dt}\,\frac{dt}{dT}\,dT = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\,dt \tag{34}$$

דוגמה: נחשב את האינטגרל המסלולי של השדה

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x,\, x+y,\, 0) \tag{35}$$

עם שתי פרמטריזציות שונות של אותו מסלול, דוגמה שבה עסקנו לפני מספר הרצאות:

$$\vec{r}_1(t) = (t, t^2, 0) \qquad 1 \le t \le 4 \tag{36}$$

$$\vec{r}_2(t) = (t^2, t^4, 0) \qquad 1 \le t \le 2 \tag{37}$$

החישוב של

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\, dt \tag{38}$$

לפי $\vec{r}_1(t)$ נותן

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(2t, t+t^2, 0\right)\cdot(1, 2t, 0)\, dt &= \int_1^4 \left(2t+2t^2+2t^3\right) dt \\ &= \left(t^2+\frac{2t^3}{3}+\frac{t^4}{2}\right)\Big|_1^4 = 184.5 \end{aligned}\tag{39}$$

וכך גם לפי $\vec{r}_2(t)$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(2t^2, t^2+t^4, 0\right)\cdot\left(2t, 4t^3, 0\right) dt &= \int_1^2 \left(4t^3+4t^5+4t^7\right) dt \\ &= \left(t^4+\frac{2t^6}{3}+\frac{t^8}{2}\right)\Big|_1^2 = 184.5 \end{aligned}\tag{40}$$

דוגמה: מצאו את $\phi(\vec{r})$ אם נתון ש־

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = (y+z,\, x+z,\, x+y+z) \tag{41}$$

דרך 1: הגרדיאנט הוא סוג של נגזרת, על כן נוכל למצוא את הפונקציה המקורית ע"י אינטגרציה. דרך אחת היא באמצעות האינטגרל המסלולי:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r})-\phi(\vec{0}) &= \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} d\phi = \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{\nabla}\phi(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = \\ &= \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \left((y'+z')\, dx' + (x'+z')\, dy' + (x'+y'+z')\, dz'\right)\end{aligned}\tag{42}$$

נבחר את המסלול הבא: תחילה ננוע לאורך ציר ה־x, אחר כך לאורך ציר ה־y, ולבסוף לאורך ציר ה־z:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r})-\phi(\vec{0}) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (y'+z')\, dx' + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (x'+z')\, dy' \\ &\quad + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} (x'+y'+z')\, dz' \end{aligned}\tag{43}$$

$$= 0 + \int_0^y x\, dy' + \int_0^z (x+y+z')\, dz' \tag{44}$$

$$= xy + xz + yz + \frac{1}{2}z^2 \tag{45}$$

כאשר השתמשנו בכך שלאורך הקטע הראשון של המסלול $y'=z'=0$, לאורך הקטע השני $x'=x$ ו־$z'=0$, ולאורך הקטע השלישי $x'=x$ ו־$y'=y$.

דרך 2: במקום להשתמש באינטגרל המסלולי, נשתמש ישירות בשלושת הרכיבים של משוואה (41). רכיב ה־x נותן

$$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x} = y + z \tag{46}$$

אינטגרציה לפי x (כאשר מחזיקים את y ו־z קבועים) נותנת

$$\phi(\vec{r}) = (y+z)\,x + C(y,z) \tag{47}$$

כאשר קבוע האינטגרציה $C(y,z)$ הוא פונקציה של y ו־z שאנחנו עדיין צריכים למצוא. לשם כך, נציב ביטוי זה עבור $\phi(\vec{r})$ ברכיב ה־y של משוואה (41):

$$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y} = x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x + z \tag{48}$$

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = z \quad\Rightarrow\quad C(y,z) = zy + C(z) \tag{49}$$

$$\phi(\vec{r}) = (y+z)\,x + zy + C(z) \tag{50}$$

לסיום, על־מנת למצוא את $C(z)$, נשתמש באופן דומה ברכיב ה־z של משוואה (41):

$$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z} = x + y + \frac{dC(z)}{dz} = x + y + z \tag{51}$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = z \quad\Rightarrow\quad C(z) = \frac{1}{2}z^2 + C \tag{52}$$

$$\phi(\vec{r}) = xy + xz + yz + \frac{1}{2}z^2 + C \tag{53}$$

תוצאה זו זהה למה שקיבלנו בדרך הראשונה. ניתן גם לבדוק את התוצאה בקלות:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x},\,\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y},\,\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right) = (y+z,\,x+z,\,x+y+z) \tag{54}$$

אלמנט שטח על משטח עקום

מאינטגרלים על עקומות, נעבור כעת לאינטגרלים על משטחים עקומים.

נניח שאנחנו מתעניינים במשטח S המוגדר ע"י $z = f(x,y)$. נרצה להגדיר את אלמנט השטח dS באופן שיאפשר לנו לעשות אינטגרציה על משטח כללי כזה. לשם כך, נסתכל על ההיטל של dS על מישור xy. גודלו יהיה נתון ע"י

$$dA = \cos\alpha\, dS \tag{55}$$

כאשר α היא הזווית שבין אלמנט השטח dS למישור xy. כדי למצוא את α עבור אלמנט שטח dS הנמצא בנקודה כלשהי (x_0,y_0,z_0), נמצא את הביטוי לנורמל למשטח S בנקודה זו. ה**נורמל** הוא וקטור יחידה המאונך למישור המשיק למשטח בנקודה הנתונה. נשים לב

שהמישור המשיק למשטח (הקירוב הליניארי של המשטח) בנקודה $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ נתון על ידי

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) \tag{56}$$

ניתן להעביר אגפים ולרשום זאת כ־

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \tag{57}$$

לפיכך, הנורמל למשטח הוא

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \tag{58}$$

אם מתוך שתי האפשרויות עבור הכיוון של $\hat{n}$ בוחרים את זו שעבורה רכיב ה־z שלו חיובי. מכאן נקבל

$$\cos\alpha = \hat{n} \cdot \hat{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \tag{59}$$

לכן נוכל לרשום את אלמנט השטח במונחים של הקואורדינטות x, y כ־

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{60}$$

בעזרתו, נוכל לחשב אינטגרל משטחי של שדה סקלרי כלשהו $g(\vec{r})$ באופן הבא:

$$\iint_S g(\vec{r})\, dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{61}$$

כאשר D הוא ההיטל של S על מישור xy.

דוגמה: נחשב את שטח הפנים של חצי כדור עם רדיוס R. במקרה זה

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,, \qquad g(\vec{r}) = 1 \tag{62}$$

מכיוון ש־

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \tag{63}$$

אלמנט השטח הוא

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy \tag{64}$$

כעת ניקח את האינטגרל על פני תחום D במישור xy המוגדר ע"י $x^2+y^2 \leq R^2$:

$$\iint_D dxdy\, \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr\, r\, \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{65}$$

$$= 2\pi \int_0^{R^2} dt\, \frac{R}{2\sqrt{t}} \tag{66}$$

$$= 2\pi R\sqrt{t}\Big|_0^{R^2} \tag{67}$$

$$= 2\pi R^2 \tag{68}$$

כאשר עברנו לקואורדינטות פולריות והשתמשנו בהצבה $t = R^2 - r^2$, $dt = -2rdr$. אז קיבלנו ששטח הפנים של חצי כדור הוא $2\pi R^2$, כמצופה.

ניתן היה גם לבצע את כל החישוב בקואורדינטות כדוריות, מבלי לעשות היטל על מישור xy:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\, R^2 \sin\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta = 2\pi R^2 \tag{69}$$

שטף של שדה וקטורי

נגדיר את **השטף** של שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ דרך משטח S

$$\Phi = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, dS \tag{70}$$

כאשר dS הוא אלמנט שטח על המשטח ו־$\hat{n}(\vec{r})$ הוא הנורמל למשטח. מכיוון שיש שני כיוונים (נגדיים זה לזה) בהם הנורמל יכול לפנות, יש להגדיר לאיזה מהם מתייחסים. לדוגמה, אם S הוא משטח סגור, ניתן להגדיר האם השטף אל תוך הנפח או השטף החוצה ייקרא חיובי.
צורת רישום נוספת של הגדרת השטף היא

$$\Phi = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \tag{71}$$

כאשר כיוונו של $d\vec{S}$ הוא בכיוון הנורמל וגודלו dS.

דוגמה: נחשב את השטף של השדה הווקטורי

$$\vec{F}(\vec{r}) = a\,\vec{r} \tag{72}$$

(כאשר a הוא קבוע) הבוקע החוצה דרך שפת כדור ברדיוס R. הנורמל לשפת הכדור נותן

$$\hat{n}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{R} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = a\frac{\vec{r}^2}{R} = aR \tag{73}$$

ואז מקבלים את השטף

$$\Phi = \iint_S aR\, dS = aR \iint_S dS = 4\pi a R^3 \tag{74}$$

כאשר השתמשנו בכך ששטח המעטפת של כדור הוא $4\pi R^2$.

עבור **משטח כללי** הנתון על ידי $z = f(x,y)$ ניתן לחשב את השטף ע"י האינטגרל

$$\Phi = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, dS = \iint_D \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\, dy \qquad (75)$$

כאשר הבענו את $\hat{n}$ ו־dS באמצעות הביטויים (58) ו־(60), והתחום D הוא ההיטל של S על מישור xy.

דוגמה: נחזור לדוגמה הקודמת של חישוב השטף של השדה הווקטורי

$$\vec{F}(\vec{r}) = a\,\vec{r} = a\,(x,y,z) \qquad (76)$$

דרך שפת כדור ברדיוס R ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית. אין אפשרות לתאר את שפת הכדור כולה באמצעות פונקציה חד־ערכית $z = f(x,y)$, אך ניתן לעשות זאת עבור החצי העליון והחצי התחתון בנפרד. עבור החצי העליון

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad (77)$$

ומקבלים את השטף

$$\Phi_1 = a \iint_D \left(x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right) dx\, dy \qquad (78)$$

$$= a \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) dx\, dy \qquad (79)$$

$$= a \iint_D \frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy = a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr\, r\, \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}} \qquad (80)$$

$$= 2\pi a R^3 \qquad (81)$$

משיקולי סימטריה, נקבל שטף זהה עבור החצי התחתון של שפת הכדור. בצורה מפורשת, נוכל לכתוב עבור החצי התחתון

$$\Phi_2 = a \iint_D \left(x, y, -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, -1\right) dx\, dy \qquad (82)$$

יש שני גורמים שיוצרים כאן שינויי סימן ביחס לביטוי עבור Φ_1. הגורם הראשון הוא שכעת אנחנו מעוניינים לבחור את כיוון וקטור הנורמל $\hat{n}$ כך שיהיה לו רכיב z שלילי, לכן יש להוסיף מינוס לפני הביטוי ממשוואה (58). הגורם השני הוא היפוך הסימן של $f(x,y)$, המביא להיפוך סימן ברכיב השלישי של $\vec{F}$ ובשני הרכיבים הראשונים של $\hat{n}$ (ראו משוואה (75)). האפקט של שני הגורמים יחד הוא להפוך את הרכיב השלישי בלבד גם ב־$\vec{F}$ וגם ב־$\hat{n}$, כפי שמופיע במשוואה (82). שינויי סימן אלה מתבטלים במכפלה הסקלרית ואנחנו מקבלים $\Phi_2 = \Phi_1$. לכן השטף הכולל הוא $\Phi = 4\pi a R^3$, כמו שקיבלנו בחישוב הקודם.

משפט סטוקס

הגדרה: הסירקולציה (ההקפה) של שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ על פני מסלול סגור C היא האינטגרל המסלולי של השדה לאורך C:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \tag{83}$$

משפט עזר: הרוטור בנקודה $\vec{r}$ מקיים

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) \cdot \hat{n} = \lim_{A\to 0} \frac{\Gamma_C}{A} = \lim_{A\to 0} \frac{\oint_C \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'}{A} \tag{84}$$

כאשר A הוא שטח קטן (נניח בצורת מלבן) במישור הניצב ל־$\hat{n}$ המכיל את הנקודה $\vec{r}$, ו־C הוא מסלול סגור התוחם את A שכיווניותו מתאימה ל־$\hat{n}$ לפי כלל יד ימין.

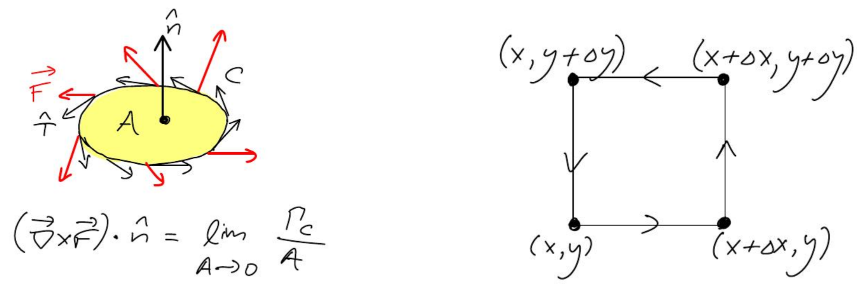
הוכחת משפט העזר: נגדיר את ציר z לפנות בכיוון $\hat{n}$ ונחשב את האינטגרל המסלולי (איור 3):[1]

$$\begin{aligned}
\Gamma_C &= \int_{(x,\,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \int_{(x+\Delta x,\,y)}^{(x+\Delta x,\,y+\Delta y)} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\
&\quad + \int_{(x+\Delta x,\,y+\Delta y)}^{(x,\,y+\Delta y)} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \int_{(x,\,y+\Delta y)}^{(x,\,y)} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' && (85) \\
&= \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y)\, dx' + \int_y^{y+\Delta y} F_y(x+\Delta x, y')\, dy' \\
&\quad + \int_{x+\Delta x}^{x} F_x(x', y+\Delta y)\, dx' + \int_{y+\Delta y}^{y} F_y(x, y')\, dy' && (86) \\
&= \int_x^{x+\Delta x} \left(F_x(x', y) - F_x(x', y+\Delta y)\right) dx' \\
&\quad + \int_y^{y+\Delta y} \left(F_y(x+\Delta x, y') - F_y(x, y')\right) dy' && (87) \\
&\simeq -\Delta y \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial F_x(x', y)}{\partial y}\, dx' + \Delta x \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial F_y(x, y')}{\partial x}\, dy' && (88) \\
&\simeq -\Delta x \Delta y\, \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} + \Delta x \Delta y\, \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} && (89) \\
&= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} \right) && (90) \\
&= \Delta x \Delta y \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \right) \cdot \hat{z} && (91)
\end{aligned}$$

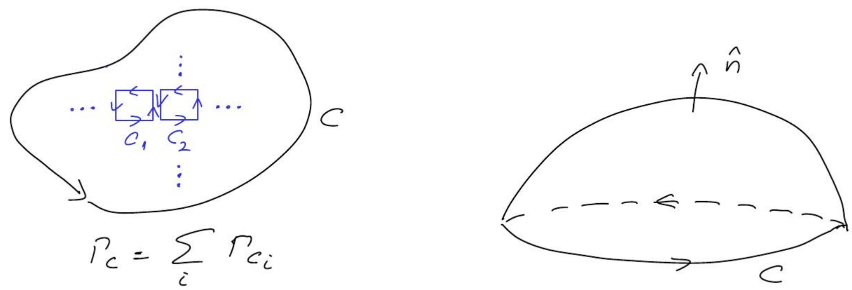
נשים לב שהשטח התחום על ידי המסלול הוא $A = \Delta x \Delta y$, ומכאן המשפט.

---

[1] השדה $\vec{F}(\vec{r})$ הוא פונקציה של x, y ו־z, אך מכיוון שההוכחה מתרחשת ב־z קבוע, נרשה לעצמנו לא לציין בצורה מפורשת את התלות ב־z.



איור 3: הוכחת משפט העזר המקשר בין הרוטור בנקודה לסירקולציה על פני מסלול אינפיניטסימלי סביב הנקודה.



איור 4: ימין: הכיוונים היחסיים של המסילה והניצב למשטח במשפט סטוקס.
שמאל: הוכחת משפט סטוקס על ידי פירוק ההקפה להקפות של מסלולים ריבועיים קטנים.

משפט סטוקס (Stokes' theorem): שטף הרוטור של השדה $\vec{F}(\vec{r})$ דרך משטח פתוח S שווה לסירקולציה של השדה לאורך המסלול C התוחם את המשטח:

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\, dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{92}$$

כאשר הצד אליו פונים וקטורי הנורמל נקבע לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון המסלול.

עבור בעיה בשני מימדים, אם נדמיין ש־$\hat{n}$ פונה בכיוון z פיקטיבי, נקבל את **משפט גרין (Green's theorem)**:

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{93}$$

כאשר כיוון המסלול C הוא נגד כיוון השעון.

הוכחת משפט סטוקס: נרשום את הסירקולציה כסכום הסירקולציות של מסלולים ריבועיים קטנים המוצמדים זה לזה ומכסים את השטח התחום על ידי המסלול C (איור 4). התרומות

מכל שתי צלעות צמודות מבטלות זו את זו ונשארת רק התרומה מהשפה:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{94}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\,(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}_i = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS \tag{95}$$

כאשר במעבר מהשורה הראשונה לשנייה השתמשנו במשפט העזר.

דוגמה: נבדוק את משפט סטוקס על השדה

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y, -x, z) \tag{96}$$

כאשר את המסלול C ניקח להיות מעגל עם רדיוס a במישור xy

$$C: \quad x^2+y^2=a^2, \quad z=0 \tag{97}$$

המכוון נגד כיוון השעון. עבור המשטח S ניקח שתי דוגמאות – עיגול וכיפה כדורית:

$$S_1 \quad : \qquad x^2+y^2 \le a^2, \qquad\qquad z=0 \tag{98}$$

$$S_2 \quad : \qquad x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad z\ge 0 \tag{99}$$

עבור האינטגרל המסלולי (אגף ימין של משפט סטוקס) נקבל

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \oint_C (y,-x,z)\cdot(dx,dy,dz) \tag{100}$$

$$= \oint_C (y\,dx - x\,dy) \tag{101}$$

$$= \oint_C (-a^2\sin^2\phi\,d\phi - a^2\cos^2\phi\,d\phi) \tag{102}$$

$$= -a^2\int_0^{2\pi} d\phi \tag{103}$$

$$= -2\pi a^2 \tag{104}$$

כאשר בשורה השלישית רשמנו את האינטגרל במונחים של הזווית הפולרית ϕ באמצעות ההצבות $x=a\cos\phi,\ y=a\sin\phi$.

כעת נחשב את אגף שמאל של משפט סטוקס. הרוטור של השדה הוא

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = -2\hat{z} \tag{105}$$

עבור המשטח S_1 נקבל

$$\Phi_{S_1} = \iint_{S_1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{S_1}(-2\hat{z})\cdot\hat{z}\,dS = -2\iint_{S_1}dS = -2\pi a^2 \tag{106}$$

בהתאמה למה שקיבלנו במשוואה (104).

עבור המשטח S_2 נקבל

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{S_2} (-2\hat{z}) \cdot \hat{r}\, dS = -2 \iint_{S_2} \cos\theta\, dS \qquad (107)$$

כאשר θ היא הזווית מהקואורדינטות הכדוריות. נרשום גם את אלמנט השטח בקואורדינטות הכדוריות, $dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, ונקבל

$$\Phi_{S_2} = -2a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = -2a^2 \cdot 2\pi \int_0^1 u\, du = -2\pi a^2 \qquad (108)$$

כאשר השתמשנו בהצבה $u = \sin\theta$. שוב קיבלנו התאמה עם משפט סטוקס.

משפטים על שדות משמרים

הטענות הבאות לגבי שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ שקולות:

1. $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$, כלומר השדה משמר.
2. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$, כלומר השדה לא־סיבובי (חסר־מערבולות).
3. $\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ לכל מסלול סגור C.
4. $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול C (אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום).

הוכחה:

- כבר הוכחנו את $1 \Leftarrow 2$ ואת $1 \Leftarrow 4 \Leftarrow 3$.
- $2 \Leftarrow 3$: לפי משפט סטוקס

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS = 0 \qquad (109)$$

- $3 \Leftarrow 4$: ניקח שני מסלולים שונים, C_1 ו־C_2, המחברים את $\vec{r}_i$ ל־$\vec{r}_f$. לאורך המסלול הסגור C הרץ לאורך C_1 וחוזר במסלול ההפוך ל־C_2 מתקיים לפי טענה 3 שהאינטגרל המסלולי מתאפס:

$$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (110)$$

לכן האינטגרלים המסלוליים על C_1 ו־C_2 שווים.

- $4 \Leftarrow 1$: נבחר נקודה שרירותית $\vec{r}_0$. מכיוון שנתון שהאינטגרל המסלולי תלוי רק בנקודות ההתחלה והסיום, הוא מגדיר פונקציה חד־ערכית של נקודת הסיום $\vec{r}$:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' \qquad (111)$$

עבור כל שתי נקודות $\vec{r}$ ו־$\vec{r} + d\vec{r}$ מתקיים:

$$d\phi = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (112)$$

מצד שני:

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{113}$$

מכיוון שהנ"ל מתקיים עבור כל $d\vec{r}$, אנחנו יכולים להסיק ש־$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

הערה: משפט סטוקס והמשפטים הנ"ל תקפים בתנאי שהנגזרות החלקיות הראשונות של $\vec{F}(\vec{r})$ רציפות בתחום המדובר. אם למשל $\vec{F}(\vec{r})$ מתבדר בנקודה מסוימת, המשפטים לא חייבים להתקיים. ניקח לדוגמה את השדה

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0) \tag{114}$$

שמתבדר (לא מוגדר) עבור $x = y = 0$ (כלומר על ציר ה־z). הנגזרות הלא־מתאפסות הרלוונטיות לחישוב הרוטור של שדה זה הן

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{115}$$

פרט לקו שעליו השדה לא מוגדר, הרוטור נתון ע"י

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{116}$$

ניקח עכשיו מסלול מעגלי במישור xy עם רדיוס 1 סביב ציר ה־z. נוכל לתאר אותו באמצעות הפרמטריזציה הבאה עם $0 \le t \le 2\pi$:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \tag{117}$$

השדה לאורך המסלול נתון על ידי

$$\vec{F}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \tag{118}$$

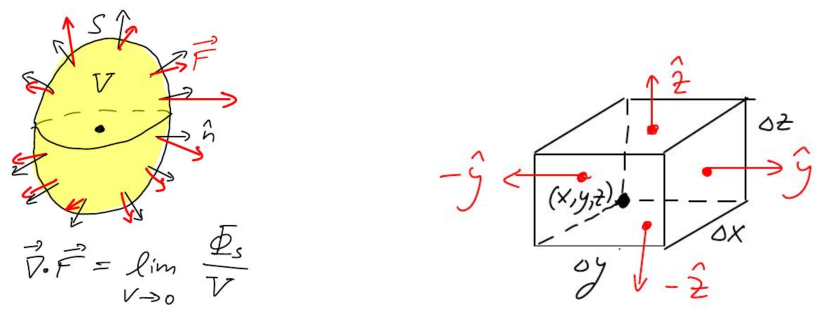
ווקטור נגזרות הקואורדינטות הוא

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0) \tag{119}$$

האינטגרל המסלולי של השדה

$$\begin{aligned}\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0\end{aligned} \tag{120}$$

אנחנו רואים שלמרות שהרוטור מתאפס בכל מקום פרט לציר ה־z (עליו איננו מוגדר), האינטגרל המסלולי הסגור אינו מתאפס.



איור 5: משפט גאוס עבור נפח אינפיניטסימלי.

משפט גאוס

משפט גאוס (או **משפט הדיברגנץ**): השטף של שדה וקטורי $\vec{F}(\vec{r})$ היוצא החוצה מתוך מעטפת סגורה כלשהי S, שווה לאינטגרל על הדיברגנץ של השדה בתוך הנפח התחום על ידי המעטפת:

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS \tag{121}$$

הוכחה: ראשית נראה שהשטף של $\vec{F}(\vec{r})$ דרך משטח קובייתי אינפיניטסימלי S שווה לדיברגנץ של $\vec{F}(\vec{r})$ כפול הנפח התחום בתוך המשטח. השטף מורכב מאינטגרלים משטחיים על כל אחת משש פאות הקוביה (איור 5):

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = &\iint dx'dy'\left(\hat{z}\cdot\vec{F}(x',y',z+\Delta z)-\hat{z}\cdot\vec{F}(x',y',z)\right)\\ &+\iint dx'dz'\left(\hat{y}\cdot\vec{F}(x',y+\Delta y,z')-\hat{y}\cdot\vec{F}(x',y,z')\right)\\ &+\iint dy'dz'\left(\hat{x}\cdot\vec{F}(x+\Delta x,y',z')-\hat{x}\cdot\vec{F}(x,y',z')\right)\end{aligned} \tag{122}$$

נשים לב שניתן לרשום את השורה הראשונה בתור

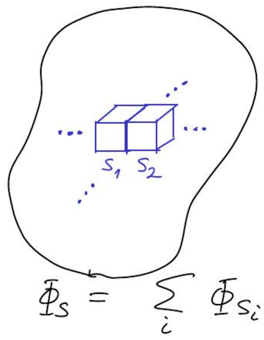
$$\begin{aligned}&\Delta z\iint dx'dy'\,\frac{F_z(x',y',z+\Delta z)-F_z(x',y',z)}{\Delta z}\\ &\simeq \Delta z\iint dx'dy'\,\frac{\partial F_z(x',y',z)}{\partial z}\end{aligned} \tag{123}$$

$$\simeq \Delta z\,\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}\iint dx'dy' \tag{124}$$

$$\simeq \Delta x\Delta y\Delta z\,\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z} \tag{125}$$

יחד עם תרומות דומות מהשורה השניה והשלישית מקבלים

$$\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}\right)=\Delta V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) \tag{126}$$



איור 6: הוכחת משפט גאוס על ידי פירוק השטף הכולל לתת־שטפים דרך קוביות קטנות.

כדי להוכיח את משפט גאוס עבור נפח סופי, נרשום את השטף דרך S כסכום של שטפים דרך משטחים קטנים קובייתיים S_i הצמודים זה לזה וממלאים את הנפח התחום בתוך S (איור 6), כי התרומות של כל שתי פאות צמודות מתבטלות ונשארת התרומה דרך השפה. אז מקבלים

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oiint_{S_i}\vec{F}\cdot\hat{n}_i\,dS_i \tag{127}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\Delta V_i \tag{128}$$

$$= \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV \tag{129}$$

דוגמה: שימוש במשפט גאוס בגרביטציה (כבידה)

שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ הנוצר על ידי קונפיגורציית מסה המתוארת על ידי צפיפות $\rho(\vec{r})$ מקיים

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{130}$$

כאשר $G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ הוא קבוע הכבידה. (שדה הכבידה $\vec{g}$ קובע את כוח הכבידה שיפעל על גוף בעל מסה m לפי $\vec{F}=m\vec{g}$.) כמצופה ממשמעות הדיברגנץ, המשמעות הפיזיקלית של משוואה זו היא שצפיפות המסה $\rho(\vec{r})$ היא המקור של שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ (משמעות הסימן מינוס היא ששדה הכבידה פונה אל המסה שיוצרת אותו, ולא ממנה).[2]

באמצעות משפט גאוס ניתן במקרים סימטריים מסוימים לחשב את שדה הכבידה בצורה פשוטה. ראשית, נעשה אינטגרציה של משוואה (130) על הנפח V הכלוא בתוך משטח סגור

[2] בנוסף, ידוע ששדה הכבידה הוא (מינוס) הגרדיאנט של הפוטנציאל הכבידתי, $\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$. לכן הוא שדה לא־סיבובי: $\vec{\nabla}\times\vec{g}(\vec{r}) = 0$.

כללי S ונקבל

$$\iiint_V dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) = \iiint_V dV(-4\pi G\rho(\vec{r})) \tag{131}$$

$$= -4\pi G M_V \tag{132}$$

כאשר M_V היא המסה הכוללת הנמצאת בפנים. משפט גאוס הופך משוואה זו ל־

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = -4\pi G M_V \tag{133}$$

נתמקד עכשיו במקרה ספציפי, **מסה נקודתית** M בראשית. משיקולי סימטריה, שדה הכבידה חייב להיות בכיוון הרדיאלי וגודלו יכול להיות תלוי רק ב־r (ללא תלות זוויתית):

$$\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r} \tag{134}$$

ניקח את S להיות משטח כדורי בעל רדיוס r שמרכזו בראשית. הנורמל למשטח הוא $\hat{n}=\hat{r}$, אז נקבל

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \oiint_S g(r)\,\hat{r}\cdot\hat{r}\,dS = g(r)\oiint_S dS = 4\pi r^2 g(r) \tag{135}$$

לפי משוואה (133) זה שווה ל־$-4\pi GM$, מה שמביא אותנו ל־

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM\frac{\hat{r}}{r^2} \tag{136}$$

ולביטוי המוכר עבור הכוח שמסה M מפעילה על מסה נקודתית m הנמצאת במיקום $\vec{r}$ ביחס אליה:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} \tag{137}$$

כשיש **יותר ממסה אחת** התורמת לשדה, למשל $\rho(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r})$, ניתן לקבל פתרון על ידי חיבור הפתרונות שהיו מתקבלים עבור כל אחת מהמסות בנפרד כי המשוואה (130) ליניארית, כלומר אם

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}_1(\vec{r}) = -4\pi G\rho_1(\vec{r}) \tag{138}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}_2(\vec{r}) = -4\pi G\rho_2(\vec{r}) \tag{139}$$

אז נוכל לסכום ולקבל

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})) = -4\pi G\,(\rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r})) \tag{140}$$

כלומר נקבל את הפתרון $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})$.