

## מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 7

### מסילות במרחב

ניתן לתאר עקומה במרחב באמצעות מסילה המתארת את מיקומי הנקודות שעל העקומה כפונקציה של פרמטר  $t$  הגדל מונוטונית לאורך העקומה

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}, \quad t_i < t < t_f$$

כדי לתאר את התנועה לאורך המסילה נגדיר ווקטור "מהירות"

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}$$

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

פרמטיזציה שונה תשפיע על ווקטור המהירות אבל לא על אורך המסילה. כדי לחשב את האורך של העקומה נחלק אותה לחלקים קטנים ונסכום על האורך של כל החלקים האלו

$$S = \int_a^b |d\vec{r}(t)| = \int_a^b \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2}$$

כדי לחשב את האינטגרל נעבור לאינטרגל על הפרמטר  $t$ , כאשר  $\vec{r}(t_i) = a$ ,  $\vec{r}(t_f) = b$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt$$

שימו לב שהפרמטר יכול להיות גם אחת מקוארדינטות המיקום עצמן, אם הקוארדינטות האחרות תלויות בה.

## תרגיל 1

חשבו את אורך העקומה

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \ln(\cos t)), \quad 0 \leq t \leq \pi/4$$

## פתרון

נחשב את אורך העקומה

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(t)} dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-u+1+u}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| = \ln |1 + \sqrt{2}| \end{aligned}$$

## תרגיל 2

מהו אורך הפרבולה

$$y = x^2$$

בתחום  $0 \leq x \leq 1$

## פתרון

העקומה היא מהצורה

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, 0)$$

נזכור כי לפי כלל השרשרת:  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$   
 נכתוב מחדש:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

מכאן:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \quad \{2x = \sinh(z); \quad 2dx = \cosh(z) dz\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sinh^{-1}(2)} \cosh^2(z) dz = \frac{1}{4} \int_0^{\sinh^{-1}(2)} (\cosh(2z) + 1) dz = \frac{1}{4} \left[ \frac{\sinh(2z)}{2} + z \right] \Big|_0^{\sinh^{-1}(2)} \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\sinh(2 \sinh^{-1}(2))}{2} + \sinh^{-1}(2) \right] = \frac{1}{4} [2 \cosh(\sinh^{-1}(2)) + \sinh^{-1}(2)] \\ &= \frac{1}{4} [2\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1}(2))} + \sinh^{-1}(2)] = \frac{1}{4} [2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)] \end{aligned}$$

### תרגיל 3

סליל אנכי מתואר על ידי

$$\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, ht)$$

כאשר  $a$  ו- $h$  הם קבועים נתונים. נמלה זוחלת על הסליל במהירות קבועה  $v$ .  
 כמה זמן לוקח לה לעשות סיבוב אחד

### פתרון

נגדיר שהזמן שלוקח לנמלה לעבור סיבוב אחד הוא  $T$ .  
 כדי לחשב את האורך של המסלול לאורך סיבוב אחד נחשב את  $v(t)$ , (שימו לב, זו לא המהירות של הנמלה אלא השינוי של המיקום על המסילה כתלות בפרמטר  $t$ )

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) + h^2} \\
 &= \sqrt{a^2 + h^2}
 \end{aligned}$$

במהלך סיבוב אחד הפרמטר  $t$  משתנה כך ש  $t_i = 0, t_f = 2\pi$  האורך של המסילה שהנמלה עוברת במהלך סיבוב אחד הוא

$$S = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + h^2}$$

מכיוון שהמהירות שלה היא קבועה  $v$  הזמן שייקח לה לעבור סיבוב אחד הוא

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2\pi \sqrt{a^2 + h^2}}{v}$$

## אנליזה ווקטורית - גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

עבור הגדרת האופרטורים ניזכר באופרטור הגזירה במערכת קואורדינטות קרטזית:

$$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \partial_i \hat{x}_i$$

איתנו הגדרנו את הגרדיאנט על פונקציה סקלרית  $\phi$ :

$$\vec{\nabla} \phi = \partial_x \phi \hat{x} + \partial_y \phi \hat{y} + \partial_z \phi \hat{z} = \partial_i \phi \hat{x}_i$$

באותו אופן נגדיר את הדיברגנץ על פונקציה ווקטורית  $\vec{F}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = \partial_i F_i$$

$\vec{F}$  הינו שדה ווקטורי, נזכור כי אם  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$  בכל נקודה אזי  $\vec{F}$  חסר מקורות. הדיברגנץ הינו מדד לכמה השדה הווקטורי מתרחב בנקודה מסויימת. נגדיר את הרוטור:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

או לפי אינדקס מסויים:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{F}]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

הרוטור הוא מדד למערבולתיות השדה.  
נגדיר את הלפלסיאן על שדה סקלרי:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \Delta \phi = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi = \partial_i \partial_i \phi$$

## תרגיל 4

מצאו ביטוי לרוטור של שדה סקלרי כפול שדה ווקטורי

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F})$$

## פתרון

המכפלה הווקטורית תיתן לנו ווקטור לכן נתבונן לפי רכיבים:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\phi \vec{F})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\phi F_k) = \\ &= \varepsilon_{ijk} (\partial_j \phi) F_k + \phi \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k = \\ &= [(\vec{\nabla} \phi) \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F}]_i \end{aligned}$$

לכן

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) = (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

## תרגיל 5

הוכיחו את הזהות עבור שדה וקטורי :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

## פתרון

נתבונן לפי איברים :

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_\ell A_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_\ell A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_\ell A_m = \partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i \\ &= [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]_i \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$