מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 8

שדה משמר

שדה ווקטורי מוגדר כשדה משמר אם קיימת פונקציה סקלרית $\phi\left(\vec{r}\right)$ כך ש:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right)=-\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\right)$$

כלומר אם השדה הזה הוא גרדיאנט של פונקציה סקלרית כלשהי. הפונקציה $\phi\left(\vec{r}\right)$ נקראת הפוטנציאל הסקלארי של $\vec{F}$.
ניתן להראות שעבור שדה משמר הרוטור מתאפס בכל נקודה, כלומר זהו שדה לא סיבובי.
אם קיים שדה ווקטורי $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$ כך שמתקיים:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{r}\right)$$

אז $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$ נקרא הפוטנציאל הווקטורי של $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$.
ניתן להראות שעבור שדה כזה הדיברגנץ מתאפס בכל נקודה, כלומר זהו שדה חסר מקורות.

תרגיל 1

מצאו פונקציה סקלרית המקיימת $\vec{F}=-\nabla\phi$ כאשר:

$$\vec{F}=\left(x^{2}+y,y^{2}+x,ze^{z}\right)$$

פתרון

השיוויון $\vec{F}=-\nabla\phi$ אומר שאם נתבונן לפי רכיבים:

$$F_i=-\partial_i\phi$$

לכן נתחיל בלעשות אינטגרל לפי x על רכיב ה-x של השדה הווקטורי:

$$\phi=-\int F_x dx=-\int\left(x^2+y\right)dx=-\frac{x^3}{3}-xy+C(y,z)$$

שימו לב שנשאר לנו קבוע לפי x שיכול להיות תלוי ב (y,z). עכשיו נגזור את הפוטנציאל לפי y ונשווה לרכיב ה-y של השדה הווקטורי:

$$\begin{aligned}\partial_y\phi&=-F_y\\ -x+\partial_y C&=-y^2-x\\ C(y,z)&=-\frac{y^3}{3}+C(z)\end{aligned}$$

ובאותו אופן לפי z:

$$\begin{aligned}\partial_z\phi&=-F_z\\ \partial_z C(z)&=-ze^z\\ C(z)&=e^z(1-z)+C\end{aligned}$$

וקיבלנו:

$$\phi=-\frac{x^3}{3}-xy-\frac{y^3}{3}+e^z(1-z)+C$$

משפט הפירוק של הלמהולץ

על פי משפט הפירוק של הלמהולץ כל שדה וקטורי יכול להכתב כסכום של שני שדות, שדה משמר ושדה חסר מקורות:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\right)+\vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{r}\right)$$

תרגיל 2

פרקו את השדה

$$\vec{F} = \frac{1}{2}(x-y, x+y, 0)$$

לשני שדות, אחד חסר מקורות ואחד חסר סיבוביות ומצאו את הפוטנציאלים שלהם

פתרון

נבדוק את השדה

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-y & x+y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0,0,1+1) = (0,0,1)$$

כלומר זהו שדה עם מקורות ועם סיבוביות
נפרק אותו לשני שדות

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$$

כאשר

$$\vec{G} = \frac{1}{2}(x, y, 0), \vec{H} = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$$

ניתן לראות בקלות ש-$\vec{G}$ הוא שדה חסר סיבוביות ו-$\vec{H}$ הוא שדה חסר מקורות

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{G} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

כלומר

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\left(\vec{r}\right)$$

נמצא את הפוטנציאלים
על פי רכיבים

$$\partial_x \phi = -G_x = -\frac{x}{2}$$

$$\rightarrow \phi = -\frac{x^2}{4} + C\left(y, z\right)$$

$$\partial_y \phi = \partial_y C\left(y, z\right) = -\frac{y}{2}$$

$$C\left(y, z\right) = -\frac{y^2}{4} + C\left(z\right)$$

$$\partial_z \phi = \partial_z C\left(z\right) = 0$$

$$C\left(z\right) = C$$

$$\rightarrow \phi = -\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) + C$$

עבור השדה חסר המקורות נקבל

$$\partial_y A_z - \partial_z A_y = H_x = -\frac{y}{2}$$

$$\partial_z A_x - \partial_x A_z = H_y = \frac{x}{2}$$

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x = H_z = 0$$

אם נבחר ש $A_x = A_y = 0$ נקבל

$$\partial_y A_z = -\frac{y}{2}$$

$$\rightarrow A_z = -\frac{y^2}{4} + C\left(x, z\right)$$

$$-\partial_x A_z = -\partial_x C(x,z) = \frac{x}{2}$$

$$C(x,z) = -\frac{x^2}{4} + C(z)$$

$$\to A_z = -\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) + C(z)$$

$$\vec{A} = \left(0, 0, -\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) + C(z)\right)$$

נשים לב שבשני הפוטנציאלים יש לנו חופש כיול של בחירת הקבועים

אינטגרל מסלולי של שדה סקלרי ווקטורי

האינטגרל המסלולי של שדה סקלרי $f(\vec{r})$ לאורך מסילה C הוא:

$$\int_C f(\vec{r})\,|d\vec{r}|$$

ושל שדה ווקטורי $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

כאשר $d\vec{r}$ הוא אלמנט אורך בכיוון המשיק למסילה.
כדי לחשב אינטגרל מסלולי:

1. נרשום את המסילה C על ידי פרמטר t

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

ונזהה את הגבולות t_i ו t_f כך ש $\vec{r}(t_i) = \vec{r}_i, \ \ \vec{r}(t_f) = \vec{r}_f$

2. נחשב את ווקטור המהירות של המסילה $\vec{v}(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

3. נחשב את האינטגרל

(א) עבור שדה סקלרי

$$\int_{t_i}^{t_f} f\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\left|\frac{d\vec{r}\left(t\right)}{dt}\right|dt=\int_{t_i}^{t_f} f\left(\vec{r}\left(t\right)\right)v(t)dt$$

(ב) עבור שדה ווקטורי

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\cdot\frac{d\vec{r}\left(t\right)}{dt}dt=\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\cdot\vec{v}(t)dt$$

עבור שדה משמר:

$$\int_C \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=-\int_C \vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=-\int_C d\phi=\phi\left(\vec{r}_i\right)-\phi\left(\vec{r}_f\right)$$

כלומר, התוצאה לא תלויה במסלול אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום, ובפרט עבור מסילה מעגלית $\vec{r}_i=\vec{r}_f$

$$\oint \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=0$$

תרגיל 3

נתון השדה הווקטורי:

$$\vec{F}=\left(\sqrt{z},2x,\sqrt{y}\right)$$

והמסילות מ$(0,0,0)$ ל$(1,1,1)$ הבאות:

- $0\le t\le 1$ (t,t,t)
- $0\le t\le 1$ (t,t^2,t^4)

חשבו את $W=\int_C \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$ על שתי המסילות.

פתרון

ראשית נבדוק אם השדה משמר

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ \sqrt{z} & 2x & \sqrt{y}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}},2\right)$$

הרוטור לא מתאפס בכל נקודה ולכן זה לא שדה משמר
לכן צריך לחשב את האינטגרל במפורש עבור שתי המסילות

- עבור (t,t,t) $0\le t\le 1$

$$\vec{F}=\left(\sqrt{z},2x,\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{t},2t,\sqrt{t}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(1,1,1)$$

$$\int_C\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left(\sqrt{t}+2t+\sqrt{t}\right)dt=\left.\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1+\left.t^2\right|_0^1=\frac{7}{3}=\frac{35}{15}$$

- עבור (t,t^2,t^4) $0\le t\le 1$

$$\vec{F}=\left(\sqrt{z},2x,\sqrt{y}\right)=\left(t^2,2t,t\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(1,2t,4t^3\right)$$

$$\int_C\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left(t^2+4t^2+4t^4\right)dt=\left.\frac{5t^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{4t^5}{5}\right|_0^1=\frac{37}{15}$$

תרגיל 4

נתון השדה הווקטורי:

$$\vec{F} = \left(2x, -y^2, \frac{4}{1+z^2}\right)$$

חשבו את

$$W = \int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$

פתרון

ראשית נבדוק אם השדה משמר

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x & -y^2 & \frac{4}{1+z^2} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

הרוטור מתאפס בכל נקודה ולכן זה שדה משמר.
נמצא את הפוטנציאל הסקלרי שלו:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\begin{aligned} \phi &= -\int F_x dx = -x^2 + C(y,z) \\ \partial_y \phi &= -F_y = y^2 \\ C(y,z) &= \frac{y^3}{3} + C(z) \\ \partial_z \phi &= -F_z = -\frac{4}{1+z^2} \\ C(z) &= -4\arctan(z) + C \end{aligned}$$

כלומר

$$\phi=-x^2+\frac{y^3}{3}-4\arctan(z)+C$$

לכן האינטגרל:

$$W=\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)}\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=\phi\left(0,0,0\right)-\phi\left(3,3,1\right)=9-9+4\arctan(1)=\pi$$