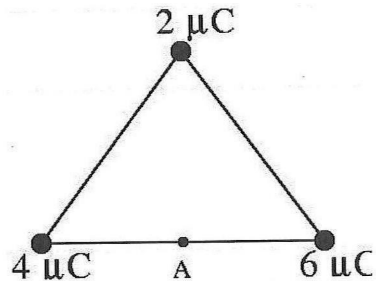
פתרון עבודה 6 - חזרה על פוטנציאל חשמלי

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה 4103



1. כדי למצוא את העבודה הדרושה לבניית המערכת יש לחשב את העבודה הדרושה להבאת כל אחד מהמטענים למקומו, לפי הסדר. נניח שקודם מביאים את המטען 2μC. בשביל זה לא צריך להשקיע אנרגיה $W_1 = 0$ ולכן לא מתבצעת עבודה.
אחר כך מביאים את המטען 4μC למרחק של 1cm מהמטען 2μC. הפוטנציאל בנקודה שאליה מביאים אותו הוא:

$$V_2 = \frac{kq_1}{r_{12}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0.01} = 1.8 \cdot 10^6 \,[\text{Volt}]$$

מכאן שהעבודה הדרושה להביא את המטען לנקודה ניתנת לפי:

$$W_2 = q_2 V_{12} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1.8 \cdot 10^6 = 7.2 \,[\text{J}]$$

אחר כך מביאים את המטען 6μC למרחק של 1cm מהמטען 2μC ולמרחק של 1cm מהמטען 4μC. הפוטנציאל בנקודה שאליה מביאים אותו יחושב באמצעות סופרפוזיציה:

$$\begin{aligned} V_3 = V_{13} + V_{23} &= \frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}} \\ &= \frac{9 \cdot 10^9}{0.01} \cdot (2+4) \cdot 10^{-6} = 5.4 \cdot 10^6 \,[\text{Volt}] \end{aligned}$$

ועבודה הדרושה לכך:

$$W_3 = q_3 V_3 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 5.4 \cdot 10^6 = 32.4 \,[\text{J}]$$

לכן סה״כ עבודה הדרושה לבניית המערכת היא:

$$W_{\text{tot}} = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + 7.2 + 32.4 = \boxed{39.6 \,[\text{J}]}$$

2. הפוטנציאל בנקודה A שווה לסכום הפוטנציאלים הנוצרים כתוצאה מכל אחד מהמטענים בנפרד:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{kq_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_A|} + \frac{kq_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_A|} + \frac{kq_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_A|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{0.01^2 - 0.005^2}} + \frac{4}{0.005} + \frac{6}{0.005}\right] \cdot 10^{-6} = \boxed{2.008 \cdot 10^7 \,[\text{Volt}]} \end{aligned}$$

3. על מנת להעביר מטען של $1\mu\text{C}$ מאינסוף לנקודה A מספיק לנו לחשב:

$$W_A = q_A V_A = 10^{-6} \cdot 2.008 \cdot 10^7 = \boxed{20.08\,[\text{J}]}$$

2 שאלה 4316

1. על מנת לחשב את המטען הכולל נבצע אינטגרציה בקואורדינטות ספריות על צפיפות המטען:

$$Q = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_a^b r^2 \rho \mathrm{d}r = \boxed{\frac{4\pi}{3}\rho\left(b^3 - a^3\right)}$$

בצורה שקולה נוכל לפתור לבעיה אחרת: שני כדורים בעלי אותו מרכז, אחד ברדיוס a וצפיפות מטען אחידה $-\rho$ והשני ברדיוס b וצפיפות מטען אחידה ρ. מסכימה של המטען של שני הכדורים נקבל את אותה התוצאה ($\frac{4\pi}{3}\rho R^3$ - מטען של כדור טעון בצפיפות אחידה).

2. על מנת לחשב את השדה החשמלי נשתמש בסופרפוזיציה של הפתרונות של כדור טעון אחיד (כמו שאלה 2 מעבודה 4):

$$\vec{E}_{\text{ball}}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}k\rho r \cdot \hat{r} & , r < R \\ \frac{4\pi}{3}k\rho \frac{R^3}{r^2} \cdot \hat{r} & , r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = E_a(r) + E_b(r) = \boxed{\begin{cases} 0 & , r < a \\ \frac{4\pi}{3}k\rho \cdot \left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) & , a < r < b \\ \frac{4\pi}{3}k\rho \cdot \frac{b^3 - a^3}{r^2} = \frac{kQ}{r^2} & , b < r \end{cases}}$$

כאשר ניתן לראות שעבור התחום שמחוץ למעטפת מקבלים שדה שהולך כמו שדה של מטען נקודתי.

3. על מנת לחשב את הפוטנציאל החשמלי שוב נשתמש בסופרפוזיציה, כאשר את הפוטנציאל החשמלי של כדור טעון אחיד נקבל מאינטגרציה:

$$V_{\text{ball}}(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{\text{ball}}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{4\pi}{3}k\rho \begin{cases} \int_{\infty}^{R} \frac{R^3}{r'^2}\mathrm{d}r' + \int_{R}^{r} r'\mathrm{d}r' & , r < R \\ \int_{\infty}^{r} \frac{R^3}{r'^2}\mathrm{d}r' & , R < r \end{cases}$$

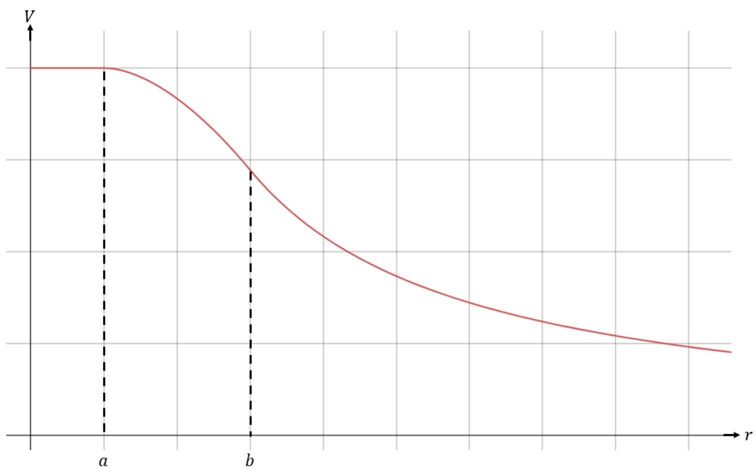
$$= \begin{cases} \frac{4\pi}{3}k\rho\left[R^2 - \frac{r^2 - R^2}{2}\right] & , r < R \\ \frac{4\pi}{3}k\rho\frac{R^3}{r} & , R < r \end{cases}$$

$$\left\{q = \frac{4\pi}{3}\rho R^3\right\} = \begin{cases} \frac{kq}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & , r < R \\ \frac{kq}{r} & , R < r \end{cases}$$

כעת מסופרפוזיציה נקבל:

$$V(r)=V_a(r)+V_b(r)=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}k\rho\left(3b^2-r^2-3a^2+r^2\right) & ,r<a\\ \frac{2\pi}{3}k\rho\left(3b^2-r^2\right)-\frac{4\pi}{3}k\rho\frac{a^3}{r} & ,a<r<b\\ \frac{4\pi}{3}k\rho\cdot\frac{b^3-a^3}{r} & ,b<r\end{cases}$$

$$=\boxed{\begin{cases}2\pi k\rho\left(b^2-a^2\right) & ,r<a\\ \frac{2\pi}{3}k\rho\left[3b^2-r^2-\frac{2a^3}{r}\right] & ,a<r<b\\ \frac{kQ}{r} & ,b<r\end{cases}}$$



3 שאלה 4312

נתון:

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0\frac{r}{a} & ,r<a\\ 0 & ,r\geq a\end{cases}$$

1. לשדה החשמלי רכיב רדיאלי בלבד $\vec{E}=E_r\hat{r}$. ניתן לחשבו ממשפט גאוס באמצעות מעטפת כדורית, כאשר את המטען בתוך המעטפת נחשב באמצעות אינטגרציה על צפיפות המטען:

$$Q_{\text{in}}(r)=4\pi\int_0^r\rho(r')\,r'^2\mathrm{d}r'=\begin{cases}\pi\rho_0\frac{r^4}{a} & ,r<a\\ \pi\rho_0 a^3 & ,r\geq a\end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi k}\oiint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{r^2E_r(r)}{k}$$

$$\Rightarrow E_r(r)=\boxed{\pi k\rho_0\cdot\begin{cases}\frac{r^2}{a} & ,r<a\\ \frac{a^3}{r^2} & ,r\geq a\end{cases}}$$

2. את הפוטנציאל נחשב לפי:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E_r(r')\,\mathrm{d}r' = -\pi k\rho_0 \cdot \begin{cases} \int_{\infty}^{a} \frac{a^3}{r'^2}\mathrm{d}r' + \int_{a}^{r} \frac{r'^2}{a}\mathrm{d}r' & ,r<a \\ \int_{\infty}^{r} \frac{a^3}{r'^2}\mathrm{d}r' & ,r\geq a \end{cases}$$

$$= \boxed{\pi k\rho_0 \cdot \begin{cases} \frac{4a^2}{3} - \frac{r^3}{3a} & ,r<a \\ \frac{a^3}{r} & ,r\geq a \end{cases}}$$

3. לחישוב העבודה הדרושה להרכבת פילוג המטען נשתמש בנוסחה של אוסף מטענים נקודתיים בגבול הרצף, כלומר:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(r_i) \to \frac{1}{2}\int_0^a \rho(r) V(r)\,\mathrm{d}r$$

$$\left\{\rho(r) = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{קור' ספריות}} \cdot \rho_0\frac{r}{a}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^a 4\pi\rho_0\frac{r^3}{a}\cdot\pi k\rho_0\left(\frac{4a^2}{3} - \frac{r^3}{3a}\right)\mathrm{d}r$$

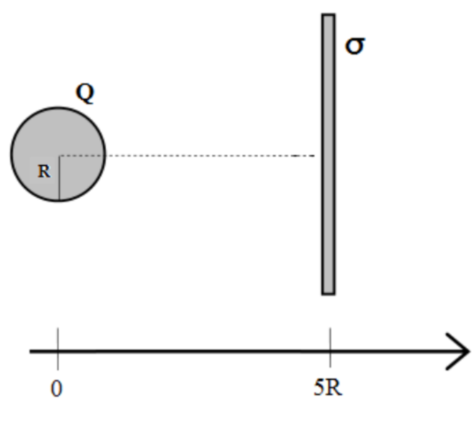
$$= \frac{2\pi^2}{3}k{\rho_0}^2\left[a\cdot r^4 - \frac{r^7}{7a^2}\right]_0^a = \boxed{\frac{4}{7}\pi^2 k{\rho_0}^2 a^5}$$

או לחלופין לפי הנוסחה לחישוב אנרגיה פוטנציאלית משדה חשמלי:

$$W = U = \frac{1}{8\pi k}\int E^2 \mathrm{d}V \overset{\{\text{קור' ספריות}\}}{=} \frac{(\pi k\rho_0)^2}{2k}\left[\int_0^a \left(\frac{r^2}{a}\right)^2 r^2\mathrm{d}r + \int_a^{\infty}\left(\frac{a^3}{r^2}\right)^2 r^2\mathrm{d}r\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}k\rho_0^2\left(\left[\frac{r^7}{7a^2}\right]_0^a + \left[-\frac{a^6}{r}\right]_a^{\infty}\right) = \boxed{\frac{4}{7}\pi^2 k{\rho_0}^2 a^5}$$

4 שאלה 4317



נפתור באמצעות סופרפוזיציה של פוטנציאלים. עבור הכדור אנו יודעים שהפוטנציאל מחוץ לכדור נתון על ידי:

$$V_{\text{ball}}(r) = \frac{kQ}{r}\ \{r > R\}$$

בנוסף אנו יודעים שהשדה החשמלי של לוח אינסופי נתון על ידי :

$$\vec{E}_{\text{plane}} = \begin{cases} 2\pi k\sigma\hat{z} & ,z > 0 \\ -2\pi k\sigma\hat{z} & ,z < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\text{plane}}\left(\vec{r}\right) = -\int \vec{E}_{\text{plane}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -2\pi k\sigma\left|z\right|$$

ועבור לוח שנמצא ב- $z = 5R$ נקבל :

$$V_{\text{plane}}\left(z\right) = -2\pi k\sigma\left|5R - z\right|$$

כך שבסך הכל הפוטנציאל החשמלי על הציר בין שפת הכדור למישור הינו :

$$V\left(z\right) = V_{\text{ball}}\left(r\right) + V_{\text{plane}}\left(z\right) = \frac{kQ}{z} - 2\pi k\sigma\left|5R - z\right| \overset{\{R<z<5R\}}{=} \boxed{\frac{kQ}{z} - 2\pi k\sigma\left(5R - z\right)}$$

5 שאלה

נתון צפיפות מטען משטחית $\sigma = \alpha_0 r\cos\theta$, את הפוטנציאל נחשב באמצעות סופרפוזיציה שיוצרים חתיכות המטען הנקודתיות $(\mathrm{d}q = \sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta)$:

$$V\left(0\right) = k\int\frac{\mathrm{d}q}{r} = k\alpha_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r$$

$$= k\alpha_0\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \boxed{0}$$