סיבובים וטנזורים

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

מטריצות

מטריצה[1] מסדר $n \times m$ היא מערך דו־מימדי עם m שורות ו־n עמודות:

$$M = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots \\ M_{21} & M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right\} m}_{n} \tag{1}$$

הרכיב בשורה ה־i והעמודה ה־j של מטריצה M מסומן M_{ij}.

פעולות על מטריצות

1. **כפל במספר:** $(cM)_{ij} = cM_{ij}$
2. **חיבור מטריצות** (מאותו סדר): $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$
3. **שיחלוף** (transpose):

$$M^T = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots \\ M_{12} & M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right\} n}_{m} \tag{2}$$

ברכיבים, **המטריצה המשוחלפת** ניתנת על ידי $(M^T)_{ij} = M_{ji}$.

4. **כפל מטריצות:** ניתן להכפיל מטריצה A מסדר $n \times m$ במטריצה B מסדר $\ell \times n$ ולקבל מטריצה C מסדר $\ell \times m$

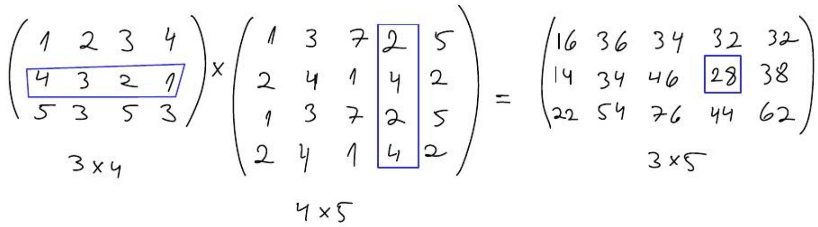
$$C = AB \tag{3}$$

שרכיביה

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} = A_{ij}B_{jk} \tag{4}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

[1]נושא המטריצות נלמד בפירוט בקורסים של אלגברה ליניארית. כאן אנחנו רק נסכם את עיקרי הדברים שיהיו רלוונטיים לנו. ניתן לקרוא עליו גם בפרק 8 של הספר הבא שקישור אליו נמצא באתר הקורס:
Mathematical Methods for Physics and Engineering, K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence.



איור 1: כפל מטריצות.

כפל מטריצות הוא פעולה דיסטריבוטיבית (חוק הפילוג)

$$A(B+C) = AB + AC \tag{5}$$

אסוציאטיבית (חוק הקיבוץ)

$$A(BC) = (AB)C \tag{6}$$

אך בדרך כלל לא קומוטטיבית (לא חלופית)

$$AB \neq BA \tag{7}$$

פעולת השחלוף פועלת על המכפלה כך:

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{8}$$

מטריצות ריבועיות $(n \times n)$

קיימת **מטריצת יחידה** I המוגדרת על ידי

$$MI = IM = M \tag{9}$$

או בכתיב האינדקסים

$$M_{ij}I_{jk} = I_{ij}M_{jk} = M_{ik} \tag{10}$$

מטריצה זו היא

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{11}$$

ולפעמים כותבים אותה בכתיב האינדקסים כ־δ_{ij} (הדלתא של קרונקר, שכבר פגשנו).

למטריצה M קיימת **מטריצה הופכית** M^{-1} המקיימת

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I \tag{12}$$

אם ורק אם $\det M \neq 0$. הדטרמיננטה של מטריצה מסדר 2×2 נתונה על ידי

$$\det M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \tag{13}$$

למטריצה מסדר 3×3 (ובאופן דומה למטריצות גדולות יותר) נחשב לפי האלגוריתם הבא:

$$\det M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$
$$= M_{11} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - M_{12} \begin{vmatrix} M_{21} & M_{23} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} + M_{13} \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} \tag{14}$$

ניתן לבדוק בקלות שלמטריצה מסדר 2×2 המטריצה ההופכית היא

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{15}$$

למטריצה מסדר 3×3:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} M_{21} & M_{23} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{21} & M_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{16}$$

ובאופן כללי:

$$\left(M^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det M} \det \tilde{M}_{ji} \tag{17}$$

כאשר $\tilde{M}_{ji}$ היא המטריצה המתקבלת מ־M אחרי מחיקת השורה ה־j והעמודה ה־i.

מטריצה ריבועית נקראת **אורתוגונלית** אם $M^T = M^{-1}$.

שילוב וקטורים ומטריצות

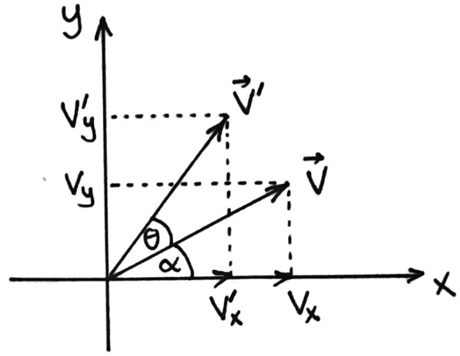
ניתן לתאר וקטור $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ כמטריצה מסדר 3×1 ("וקטור עמודה")

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ניתן גם לתאר את אותו הווקטור כמטריצה מסדר 1×3 ("וקטור שורה") ואז נסמנו $\vec{v}^T$:[2]

$$\vec{v}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

[2] אפשר לחשוב על וקטור העמודה $\vec{v}$ כמטריצה v_{i1} ועל וקטור השורה $\vec{v}^T$ כמטריצה $\left(v^T\right)_{1j} = v_{j1}$ כאשר i ו־j רצים בין 1 ל־3 ומתאימים לשלושת רכיבי הווקטור המקורי.



איור 2: סיבוב אקטיבי.

את המכפלה הסקלרית, לדוגמה, ניתן לכתוב

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}^T\vec{v}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \tag{20}$$

כפל המטריצות עשה כאן את המכפלה הסקלרית. באופן דומה, אפשר להכפיל מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ בווקטור (מסדר $n\times 1$) ולקבל וקטור (מסדר $n\times 1$)

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{11}v_1+M_{12}v_2+M_{13}v_3 \\ M_{21}v_1+M_{22}v_2+M_{23}v_3 \\ M_{31}v_1+M_{32}v_2+M_{33}v_3 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

באמצעות הסכם הסכימה נוכל לכתוב זאת כ־

$$w_i=M_{ij}v_j \tag{22}$$

סיבובים במרחב

נגדיר **סיבוב אקטיבי** כסיבוב פעיל של כל תוכן המרחב. נגדיר **סיבוב פסיבי** כסיבוב של מערכת הצירים.

סיבובים אקטיביים בשני מימדים

נוכל להציג סיבובים במרחב באמצעות מטריצות. למשל, נסתכל על וקטור כללי $\vec{v}=(v_x,v_y)$ ועל גרסתו המסובבת בזווית θ נגד כיוון השעון, $\vec{v}'=(v_x',v_y')$. אם כיוונו של $\vec{v}$ הוא בזווית α ביחס לציר ה־x (איור 2), כך שרכיביו הם

$$v_x=v\cos\alpha \tag{23}$$
$$v_y=v\sin\alpha \tag{24}$$

הרכיבים של הווקטור המסובב יהיו

$$\begin{aligned} v'_x &= v\cos(\alpha+\theta) \\ &= v(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ &= v_x\cos\theta - v_y\sin\theta \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} v'_y &= v\sin(\alpha+\theta) \\ &= v(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \\ &= v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \end{aligned} \tag{26}$$

נוכל לכתוב זאת בכתיב מטריציוני כך:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \equiv R(\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{27}$$

או

$$\vec{v}' = R(\theta)\,\vec{v} \tag{28}$$

כאשר $R(\theta)$ נקראת **מטריצת סיבוב**. נשים לב שאיננה תלויה בפרטים של הווקטור. כל הווקטורים יסובבו עם אותה המטריצה.

סיבוב בכיוון השעון יתואר כסיבוב בזווית $-\theta$. נשים לב שזוהי המטריצה המשוחלפת

$$R(-\theta) = R^T(\theta) \tag{29}$$

מכאן רואים שמטריצות סיבוב הן מטריצות אורתוגונליות:

$$R^T(\theta) = R^{-1}(\theta) \tag{30}$$

הדבר נכון למטריצות סיבוב בכל מספר של מימדים ומבטיח שמכפלה סקלרית של וקטורים לא משתנה תחת סיבוב:

$$\vec{u}'\cdot\vec{v}' = \vec{u}'^T\vec{v}' = (R(\theta)\,\vec{u})^T\,R(\theta)\,\vec{v} = \vec{u}^T R^T(\theta)R(\theta)\,\vec{v} = \vec{u}^T\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} \tag{31}$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו באורתוגונליות של $R(\theta)$ ובכך ש-$R^{-1}(\theta)R(\theta) = I$. בפרט, גדלים של וקטורים (הקשורים למכפלה הסקלרית של וקטור עם עצמו) לא משתנים תחת סיבוב.

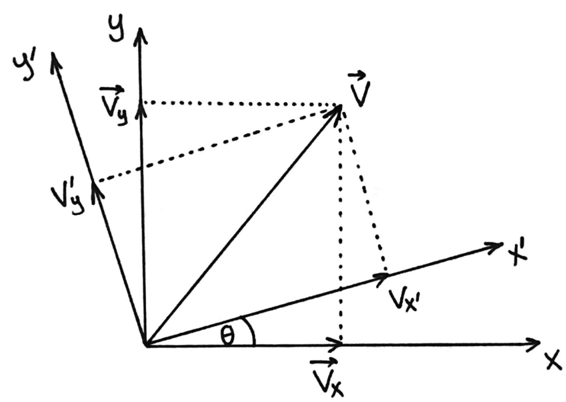
בנוסף, כפי שניתן לבדוק בקלות, בשני מימדים מטריצות הסיבוב חילופיות:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1+\theta_2) \tag{32}$$

סיבובים פסיביים (סיבוב מערכת הצירים) בשני מימדים

נניח שיש לנו מערכת צירים x, y ואנחנו מסובבים אותה בזווית θ נגד כיוון השעון ל-x', y' (איור 3). איך נתאר את אותו וקטור $\vec{v}$ בשתי מערכות הצירים? במערכת הצירים המקורית נכתוב

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} \tag{33}$$



איור 3: סיבוב פסיבי.

כעת נטיל את $v_x\hat{x} \equiv \overrightarrow{v_x}$ ואת $v_y\hat{y} \equiv \overrightarrow{v_y}$ על הצירים x', y':

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} && (34)\\ &= v_x\left(\cos\theta\,\hat{x}' - \sin\theta\,\hat{y}'\right) + v_y\left(\sin\theta\,\hat{x}' + \cos\theta\,\hat{y}'\right) && (35)\\ &= \left(v_x\cos\theta + v_y\sin\theta\right)\hat{x}' + \left(-v_x\sin\theta + v_y\cos\theta\right)\hat{y}' && (36)\end{aligned}$$

קיבלנו אם כן

$$v_{x'} = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta\,, \qquad v_{y'} = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \tag{37}$$

נוכל לכתוב זאת בכתיב מטריציוני כך:

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R^T(\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{38}$$

או

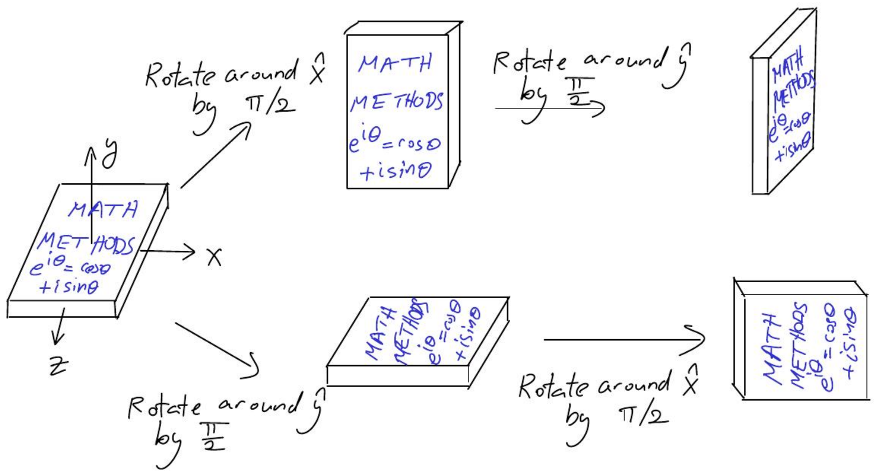
$$\vec{v}' = R^T(\theta)\,\vec{v} \tag{39}$$

כפי שניתן היה לצפות, בסיבוב פסיבי (סיבוב של מערכת הצירים, בעוד שהווקטור נשאר קבוע) בזווית θ, רכיבי הווקטור משתנים כמו בסיבוב אקטיבי של הווקטור (עם מערכת צירים שנשארת קבועה) בזווית $-\theta$.

סיבובים בשלושה מימדים

מכיוון שסיבוב סביב ציר ה־z לא מערב רכיבי z של וקטורים, מטריצת הסיבוב סביב $\hat{z}$ פשוט תסובב את רכיבי x ו־y כמו במקרה הדו־מימדי:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$



איור 4: סיבובים אינם מתחלפים.

כאשר הכיוון החיובי עבור θ הוא נגד כיוון השעון במישור xy, כמו בדיון שלנו על סיבובים בשני מימדים. ניתן לומר שהכיוון החיובי של θ מוגדר כאן על ידי כלל יד ימין ביחס לציר הסיבוב $\hat{z}$.

על ידי פרמוטציה ציקלית בין שלושת הצירים נקבל

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{41}$$

כאשר גם כאן הכיוון החיובי של θ יהיה קשור בכלל יד ימין לציר הסיבוב.

סיבובים סביב צירים שונים אינם מתחלפים בדרך כלל. למשל, כפי שמודגם באיור 4,

$$R_x(\theta_1)R_y(\theta_2) \neq R_y(\theta_2)R_x(\theta_1) \tag{42}$$

הם כן מתחלפים בגבול של זוויות קטנות, $\theta_i \ll 1$. לדוגמה:

$$R_x(\theta_1)R_y(\theta_2) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$R_y(\theta_2)R_x(\theta_1) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

כאשר הזנחנו איברים מסדר שני ב-θ_i.

סקלרים, וקטורים וטנזורים אחרים

כעת אנחנו יכולים לתת הגדרה מדויקת לטנזורים מדרגות שונות שהזכרנו בפרק "וקטורים".

סקלר (טנזור מדרגה 0) מוגדר כמספר שאינו משתנה תחת סיבוב מערכת הצירים:

$$s' = s \tag{45}$$

וקטור (טנזור מדרגה 1) הוא אובייקט שרכיביו משתנים לפי

$$\vec{v}' = R^T \vec{v} \tag{46}$$

כאשר R היא המטריצה המתארת את סיבוב מערכת הצירים. כדאי לכתוב זאת גם בכתיב האינדקסים

$$v_i' = R^T_{ij} v_j \tag{47}$$

כי כך הקשר עם טנזורים מדרגות גבוהות יותר יהיה יותר ברור.

טנזור מדרגה 2 הוא אובייקט שרכיביו T_{ij} משתנים לפי

$$T_{ij}' = R^T_{i\ell} R^T_{jm} T_{\ell m} \tag{48}$$

כאשר R^T היא אותה המטריצה שמתארת את הטרנספורמציה של רכיבי וקטורים ב־(47).[3]

נשים לב שהטרנספורמציה של T_{ij} היא כמו של מכפלה של רכיבי שני וקטורים:

$$v_i' w_j' = R^T_{i\ell} R^T_{jm} v_\ell w_m \tag{49}$$

דרך אגב, האובייקט $T_{ij} = v_i w_j$ הוא עצמו טנזור מדרגה 2. מכל שני וקטורים ניתן ליצור טנזור מדרגה 2 באמצעות **מכפלה טנזורית** כזאת, שכותבים אותה כך:

$$T = \vec{v} \otimes \vec{w} \tag{50}$$

לפעמים שימושי להסתכל על טנזור מדרגה 2, T_{ij}, כמטריצה ולרשום את הטרנספורמציה שבמשוואה (48) כהכפלת מטריצות באופן הבא:

$$T' = R^T T R \tag{51}$$

כאשר השתמשנו בכך ש־$T_{ij}' = R^T_{i\ell} R^T_{jm} T_{\ell m} = R^T_{i\ell} T_{\ell m} R_{mj}$. אם הטנזור הוא מכפלה טנזורית של שני וקטורים, $T_{ij} = v_i w_j$, המטריצה היא

$$T = \vec{v} \otimes \vec{w} = \vec{v}\,\vec{w}^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix} \tag{52}$$

טנזור מדרגה 3 הוא אובייקט שרכיביו T_{ijk} משתנים לפי

$$T_{ijk}' = R^T_{i\ell} R^T_{jm} R^T_{kn} T_{\ell mn} \tag{53}$$

וכן הלאה.

[3] ביתר פירוט, נוכל לכתוב

$$T_{ij}' = \left(R^T_{\hat{n}}(\theta)\right)_{i\ell} \left(R^T_{\hat{n}}(\theta)\right)_{jm} T_{\ell m}$$

כאשר וקטור היחידה $\hat{n}$ מציין את ציר הסיבוב ו־θ את זווית הסיבוב של מערכת הצירים.

דוגמה: טנזור האינרציה

דוגמה פיזיקלית לטנזור מדרגה 2 היא טנזור האינרציה (טנזור ההתמד) של גוף קשיח הנתון על ידי

$$I_{ij} = \iiint \rho(\vec{r})\left(\delta_{ij} r_k r_k - r_i r_j\right) dV = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} r_{\alpha,k} r_{\alpha,k} - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}\right) \qquad (54)$$

כאשר וקטורי המיקום $\vec{r}$ הם ביחס למרכז המסה של הגוף או ביחס לנקודה קבועה סביבה הגוף מסתובב, בהתאם להקשר. הביטוי הראשון רשום במונחים של צפיפות המסה בגוף, $\rho(\vec{r})$, והביטוי השני במונחים של מסות נקודתיות m_α הממוקמות בנקודות $\vec{r}_\alpha$, אשר מרכיבות את הגוף.

טנזור האינרציה מאפשר לבטא את התנע הזוויתי $\vec{L}$ (ביחס למרכז המסה או לנקודה הקבועה) ואת האנרגיה הקינטית E_K של התנועה הסיבובית כפונקציה של המהירות הזוויתית $\vec{\omega}$:[5,4]

$$L_i = I_{ij}\omega_j\,, \qquad E_K = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j \qquad (55)$$

נשים לב שמשוואות אלה משלבות טנזורים מדרגות שונות: טנזור האינרציה (שדרגתו 2), הווקטורים $\vec{\omega}$ ו־$\vec{L}$ (שהם טנזורים מדרגה 1), והסקלר E_K (טנזור מדרגה 0). הדבר מתאפשר בזכות כך שהטרנספורמציה של כל הטנזורים מתבצעת על ידי אותה מטריצת סיבוב. נסתכל למשל על הטרנספורמציה של L_i:

$$L'_i = I'_{ij}\omega'_j = R^T_{il} R^T_{jm} I_{lm} R^T_{jk}\omega_k = R^T_{il} R_{mj} R^T_{jk} I_{lm}\omega_k = R^T_{il} I_{lk}\omega_k = R^T_{il} L_l \qquad (56)$$

כאשר השתמשנו בכך ש־$R_{mj}R^T_{jk} = \delta_{mk}$ מפני שמטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות. הראינו, אם כן, שתכונות הטרנספורמציה של הטנזור I_{ij} והווקטור $\vec{\omega}$ קונסיסטנטיות עם היותו של $\vec{L}$ וקטור. באופן דומה נראה ש־E_K היא סקלר:

$$\begin{aligned} E'_K &= \frac{1}{2} I'_{ij}\omega'_i\omega'_j = \frac{1}{2} R^T_{il} R^T_{jm} I_{lm} R^T_{ir}\omega_r R^T_{js}\omega_s \\ &= \frac{1}{2}(R_{li}R^T_{ir})(R_{mj}R^T_{js}) I_{lm}\omega_r\omega_s = \frac{1}{2} I_{lm}\omega_l\omega_m = E_K \end{aligned} \qquad (57)$$

טנזורים אינווריאנטיים

מכיוון שניתן לשנות את רכיביו של כל וקטור נתון (פרט לווקטור האפס) ע"י סיבוב מערכת הצירים, ואין מערכת צירים נבחרת בעולם שלנו, וקטורים תמיד מופיעים בחוקי הפיזיקה היסודיים כגדלים דינמיים, שרכיביהם יכולים לקבל ערכים שונים בסיטואציות שונות. במילים אחרות, בחוקי הפיזיקה היסודיים אין "קבועים וקטוריים".

עבור טנזורים מדרגות גבוהות יותר, המצב יכול להיות יותר מעניין. בואו נסתכל על טרנספורמציית רכיבי הטנזורים ונשאל האם קיימים טנזורים שערכי הרכיבים שלהם לא תלויים בכיוון מערכת הצירים. כלומר, אנחנו רוצים למצוא טנזורים $T_{ij\ldots}$ שעבורם

$$T'_{ij\ldots} = R^T_{i\ell} R^T_{jm} \ldots T_{\ell m\ldots} = T_{ij\ldots} \qquad (58)$$

טנזור בעל תכונה זו נקרא **טנזור אינווריאנטי**.

[4]אנחנו מדברים כאן על תנועה שבה כיוון התנע הזוויתי $\vec{L}$ הוא לא בהכרח בכיוון המהירות הזוויתית $\vec{\omega}$. להרחבה ראו דוגמאות 8.4, 8.5, 8.6, 8.14 בספר An Introduction to Mechanics, D. Kleppner, R. Kolenkow

[5]מכיוון ש־I_{ij} מטריצה סימטרית, ניתן ללכסן אותה בעזרת טרנספורמציה אורתוגונלית (שמשמעותה סיבוב מערכת הצירים). כיווני הווקטורים העצמיים יהיו הצירים הראשיים של הגוף, והערכים העצמיים - **מומנטי האינרציה**. עבור סיבובים סביב צירים אלה, $\vec{L}$ יהיה מקביל ל־$\vec{\omega}$.

לשם פשטות, נדבר תחילה על המקרה של שני מימדי מרחב במקום שלושה. נסתכל על הדוגמה של טנזור מדרגה 2

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \tag{59}$$

ונשאל האם ניתן לבחור את ערכי הרכיבים שלו, T_{ij}, כך שהם לא ישתנו תחת אף טרנספורמציית סיבוב. כדי לענות על שאלה זו, ניקח את משוואה (48) ונדרוש לקבל $T'_{ij} = T_{ij}$. עבור הרכיב T'_{11} נקבל את הדרישה

$$\begin{aligned} T_{11} &= R^T_{1\ell} R^T_{1m} T_{\ell m} = R^T_{11} R^T_{11} T_{11} + R^T_{11} R^T_{12} T_{12} + R^T_{12} R^T_{11} T_{21} + R^T_{12} R^T_{12} T_{22} \\ &= T_{11} \cos^2\theta + (T_{12} + T_{21}) \cos\theta \sin\theta + T_{22} \sin^2\theta \end{aligned} \tag{60}$$

כלומר

$$T_{11} - T_{22} = (T_{12} + T_{21}) \cot\theta \tag{61}$$

שוויון זה יוכל להתקיים עבור כל θ רק אם המקדם של $\cot\theta$ יתאפס (כי אין תלות ב־θ באגף שמאל), אז חייבים להתקיים הקשרים

$$T_{11} = T_{22}\,, \quad T_{12} = -T_{21} \tag{62}$$

ניתן לקבל באופן דומה שהחלת דרישת האינווריאנטיות על שלושת הרכיבים הנותרים של T_{ij} לא מובילה לתנאים נוספים. אם כן, אנחנו מגיעים למסקנה שכל טנזור מהצורה

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

כאשר a ו־b הם קבועים שרירותיים, הוא טנזור אינווריאנטי (בשני מימדים). ניתן לרשום ביטוי זה גם כך:

$$T_{ij} = a\,\delta_{ij} + b\,\epsilon_{ij} \tag{64}$$

הדלתא של קרונקר, δ_{ij}, המתואר על ידי מטריצת היחידה I, הוא טנזור אינווריאנטי בכל מספר של מימדים, כפי שניתן לראות בעזרת משוואה (51):

$$I' = R^T I R = R^T R = I \tag{65}$$

בשלושה מימדים ניתן להראות שהטנזור האינווריאנטי היחיד מדרגה 2 הוא הדלתא של קרונקר δ_{ij}, הטנזור האינווריאנטי היחיד מדרגה 3 הוא סימן לוי־צ'יוויטה ϵ_{ijk}, ואין טנזורים אינווריאנטיים מדרגות גבוהות יותר (פרט למכפלות של הטנזורים הנ"ל). בשל היותם אינווריאנטיים תחת סיבובים (כלומר בלתי תלויים בכיוון מערכת הצירים) ניתן לראות את δ_{ij} ו־ϵ_{ijk} כמעין "קבועים טנזוריים" שיכולים להופיע בחוקי הפיזיקה. בפרט, ϵ_{ijk} מאפשר ליצור אובייקטים מתוחכמים כמו המכפלה הווקטורית או אופרטור הרוטור, שמופיעים בהרבה מקומות בפיזיקה. העובדה ש־ϵ_{ijk} הוא טנזור מדרגה 3 מבטיחה שמכפלה וקטורית של שני וקטורים

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \tag{66}$$

היא וקטור, כפי שתוכלו להוכיח בדומה למה שעשינו לעיל בהקשר של טנזור האינרציה. באופן כללי, כפי שמודגם ע"י משוואות (55) ו־(66), כל מכפלה של טנזורים יוצרת טנזור שדרגתו שווה למספר האינדקסים שהמכפלה משאירה חופשיים.