פתרון עבודה 7 - קבלים וחומרים דיאלקטריים

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה 5207

נתון קבל כדורי (רדיוס פנימי R_1 וחיצוני R_2) ממולא בחציו בחומר דיאלקטרי בעל מקדם דיאלקטרי ε. מהו הקיבול במערכת?

השדה החשמלי של מעטפת כדורית ברדיוס R ומטען Q הינו:

$$\vec{E}_{\text{sphere}}\left(r\right)=\begin{cases}0 & ,r<R\\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & ,r>R\end{cases}$$

מכאן שהשדה של שתי קליפות בעלות מטען $+Q$ ו-$-Q$ יהיה:

$$\vec{E}\left(r\right)=\begin{cases}0 & ,r<R_1\\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & ,R_1<r<R_2\\ 0 & ,R_2<r\end{cases}$$

מכאן שהמתח בין לוחות הקבל יהיה:

$$V=V\left(R_2\right)-V\left(R_1\right)=-\int\limits_{\infty}^{R_2}\vec{E}\left(r\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int\limits_{\infty}^{R_1}\vec{E}\left(r\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$
$$=-kQ\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=-kQ\left[\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right]=kQ\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

והקיבול של קבל כדורי (ללא חומר דיאלקטרי) יהיה $\left(k^{-1}=4\pi\varepsilon_0\right)$:

$$C_{\text{sphere}}=\frac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

ומחיבור במקביל אפשר להסיק שקיבול של חצי קבל יהיה:

$$C_{1/2}=\frac{1}{2}C_{\text{sphere}}=2\pi\varepsilon_0\cdot\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

כך שהקיבול הכולל של המערכת המתוארת בתרגיל יהיה:

$$\boxed{C_{\text{tot}}=2\pi\cdot\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)}$$

2 שאלה 5210

נתון קבל כדורי בעל רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b. בקבל ישנו חומר דיאלקטרי עם מקדם יחסי המשתנה לפי $\kappa = {}^{\alpha}/_{r}$, כאשר α קבוע ו-r זהו המרחק הרדיאלי ממרכז המערכת.

1. עבור השדה החשמלי נשתמש בחוק גאוס עם מעטפת כדורית ברדיוס $a < r < b$ (ביתר המרחב אין מטען כלוא ולכן השדה מתאפס):

$$q = \varepsilon_0 \oiint \kappa \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot r^2 \cdot E_r$$
$$= 4\pi\varepsilon_0 \alpha r \cdot E_r$$
$$\Rightarrow E_r = \boxed{\begin{cases} \frac{kq}{\alpha} \cdot \frac{1}{r} & , a < r < b \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}}$$

2. הפרש הפוטנציאלים בין המעטפות יתקבל לפי:

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{kq}{\alpha} \int_a^b \frac{1}{r} \mathrm{d}r = \frac{kq}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$\Rightarrow C = \frac{q}{V_{ab}} = \boxed{\frac{\alpha}{k \ln\left({}^{b}/_{a}\right)}}$$

3. את האנרגיה של הקבל נחשב לפי:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \boxed{\frac{q^2 k \ln\left({}^{b}/_{a}\right)}{2\alpha}}$$

3 שאלה 5103

בהתחלה נתון קבל לוחות ריבועי עם צלע של $a = 2.5\text{cm}$ ומרחק בין לוחות $d = 1\text{mm}$ עם מתח $V = 1\text{V}$. לאחר ניתוק הסוללה מרחיקים את הלוחות למרחק $2d$.

1. קיבול של קבל לוחות נתון לפי:

$$C = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}$$

כך שמקבלים שהקיבול ההתחלתי הוא $C_0 = 5.53\text{pF}$ וניתן לחשב את המטען שנצבר על הקבל:

$$q = C_0 \cdot V = 5.53\,[\text{pC}]$$

כיוון שהשדה של לוח אינסופי שטעון באופן אחיד תלוי רק בצפיפות המטען בה הוא טעון וכיוון שצפיפות המטען לא משתנה כאשר מרחיקים את לוחות הקבל (הקבל מנותק) נקבל כי גם השדה נותר קבוע. הפרש הפוטנציאלים בין הלוחות לפני הרחקתם:

$$V = E \cdot d = 1\,[\text{V}]$$

ולאחר הרחקתם נקבל:

$$V' = E \cdot 2d = 2V = \boxed{2\,[\text{V}]}$$

מכאן שהקיבול החדש יהיה:

$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{C_0}{2} = \boxed{2.76\,[\text{pF}]}$$

2. האנרגיה לפני הרחקת הלוחות:

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_0} = \boxed{2.76\,[\text{pJ}]}$$

ולאחר הרחקת הלוחות:

$$U' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'} = 2U_0 = \boxed{5.53\,[\text{pJ}]}$$

3. העבודה שנעשתה היא הפרש האנרגיות:

$$W = U' - U_0 = \boxed{2.76\,[\text{pJ}]}$$

עבודה זו חיובית, כלומר היה צריך להשקיע אנרגיה חיצונית בכדי להרחיק את הלוחות.

4 שאלה 5201

נתון: $K_{e2}=9$,$K_{e1}=7.5$,$d=3.8\text{mm}$,$A=5.45\text{cm}^2$.

נחלק את הפרש הפוטנציאל בין הלוחות לשני תחומים $V=V_1+V_2$, כאשר השדה בין לוחות הקבל הוא $E={}^{\sigma}/_{\kappa\varepsilon_0}$ $(\sigma\equiv{}^{q}/_{A})$. הפרש הפוטנציאל בין הלוח העליון למרכז יהיה:

$$V_1=-\int_{d/2}^{0}E\mathrm{d}z=\frac{\sigma}{K_{e1}\varepsilon_0}\int_{0}^{d/2}\mathrm{d}z=\frac{\sigma d}{2K_{e1}\varepsilon_0}$$

ועבור הלוח התחתון:

$$V_2=-\int_{d}^{d/2}E\mathrm{d}z=\frac{\sigma}{K_{e2}\varepsilon_0}\int_{d/2}^{d}\mathrm{d}z=\frac{\sigma d}{2K_{e2}\varepsilon_0}$$

כך שהפוטנציאל הכולל יהיה:

$$V=\frac{qd}{2AK_{e1}\varepsilon_0}+\frac{qd}{2AK_{e2}\varepsilon_0}=\frac{qd}{2A\varepsilon_0}\cdot\frac{K_{e1}+K_{e2}}{K_{e1}\cdot K_{e2}}$$

והקיבול:

$$C=\frac{q}{V}=\boxed{\frac{2A\varepsilon_0}{d}\cdot\frac{K_{e1}\cdot K_{e2}}{K_{e1}+K_{e2}}\simeq 10\,[\text{pF}]}$$

באופן שקול היה ניתן לפתור את זה באמצעות חיבור שני קבלים בטור $\left(C_{\text{בטור}}=\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}\right)$ כאשר לכל קבל יש את החומר הדיאלקטרי שלו ומרחק בין הלוחות של ${}^{d}/_{2}$.

5 שאלה 5114

1. על מנת לחשב את השדה החשמלי נשתמש בחוק גאוס עם מעטפת גלילית שתעבור במרחק x ובגובה $l < L$ מאמצע התיל השמאלי:

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{2\pi x l}_{\text{מעטפת גליל}} \varepsilon_0 E_1 = q \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{x}\hat{x}$$

באותה צורה נקבל עבור התיל השני (מעטפת ברדיוס x עם מרכז ב-d, כלומר $\mathrm{d}\vec{A} = -\hat{x}$, מטען שלילי!):

$$\vec{E}_2 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{d-x}(-\hat{x}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{d-x}\hat{x}$$

כך שהשדה הכולל יהיה:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \boxed{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\hat{x}}$$

2. עבור הפרש הפוטנציאל נזכור שהשדה בתוך תיל מוליך מתאפס ולכן גבולות האינטגרציה יהיו לפי דופנות התילים:

$$\Delta V = -\int_{d-R}^{R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \int_{R}^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left[\ln(x) - \ln(d-x)\right]_R^{d-R} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln\left(\frac{d-R}{R}\right)^2 = \boxed{\frac{q}{\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln\left(\frac{d-R}{R}\right)}$$

3. הקיבול ליחידת אורך יתקבל לפי:

$$\frac{C}{l} = \frac{q}{l \cdot \Delta V} = \boxed{\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)}}$$