

אסטרונומיה כללית - תרגול 7

מתרגל: עידו אופיר

תוכן עניינים

2.....	1. קוסמולוגיה.....
2.....	1.1. מטריקת FLRW.....
2.....	1.2. משוואות פרידמן.....
4.....	1.3. אנרגיה אפלה.....
5.....	2. תרגילים.....
5.....	2.1. תרגיל 1.....
5.....	2.2. תרגיל 2.....
5.....	2.3. תרגיל 3.....

1. קוסמולוגיה

1.1. מטריקת FLRW

לפי העקרון הקוסמולוגי (כפי שנוסח על ידי איינשטיין) - היקום הוא איזוטרופי והומוגני.

מכך שחוק האבל הוא לינארי במהירות $v = H_0 D$ אנו מקבלים שבמרחקים גדולים מספיק $v > c$. לכן, על מנת לתאר את הדינמיקה של היקום צריך להשתמש ביחסות כללית אשר מסבירה את עקמומיות היקום כתוצאה מצפיפות מסה ואנרגיה היוצרים את הכבידה. את עקמומיות היקום ניתן לתאר על ידי מטריקה המתאימה לעקרונות הקוסמולוגיים של איזוטרופיות והומוגניות היקום.

אם מרחב הוא הומוגני העקמומיות חייבת להיות זהה בכל מקום. יש רק שלוש אופציות גאומטריות שיש להן עקמומיות קבועה: יקום שטוח, יקום עם עקמומיות חיובית ויקום עם עקמומיות שלילית.

המטריקה אשר מתארת את כל האפשרויות היא מטריקת Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker FLRW והיא נתונה על ידי:

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

כאשר $R(t)$ הוא פקטור הסקאלה מתאר את התרחבות היקום בזמן. המטריקה מתארת אינטרוול של מרחק זמן בין שני אירועים סמוכים כאשר:

$$(2) \quad k = \begin{cases} 1 & \text{positively curved} \\ 0 & \text{flat} \\ -1 & \text{negatively curved} \end{cases}$$

קואורדינטות של גלקסיות מסמנים ב- (r, θ, ϕ) אשר נשארות זהות עם התרחבות בהתאם ל- $R(t)$. קואורדינטות אלו נקראות comoving coordinates. המרחק המידי מגלקסיה בקואורדינטה r - proper distance והוא נתון על ידי:

$$(3) \quad l = \int_{r=0}^r dl = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} R \sin^{-1}(r) & \text{if } k = +1 \\ Rr & \text{if } k = 1 \\ R \sinh^{-1}(r) & \text{if } k = -1 \end{cases}$$

1.2. משוואות פרידמן

משוואות פרידמן מקשרות בין הנגזרות של פקטור הסקאלה לצפיפות האנרגיה, לחץ ועקמומיות היקום. משוואות פרידמן הראשונה:

$$(4) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{kc^2}{R^2}$$

משוואות פרידמן השנייה:

$$(5) \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P)$$

משוואת פרידמן הן משוואות דיפרנציאליות עבור הפרמטרים $R(t)$, $\rho(t)$, $P(t)$.

בגלל שליקום צפיפות ρ לא אפסית, אנו יודעים ש- $\dot{R} \neq 0$. (גם אם כל האגף הימני של משוואה (4) מתאפס). ממשוואת פרידמן השנייה ניתן לראות שהתאוצה היא תמיד שלילית כלומר, היקום מתרחב בתאוצה (תאוצה שלילית) וכך הוא תמיד היה. חוק האבל אומר לנו שהיקום מתרחב בכל רגע ושהוא התרחב גם בעבר. מכאן מסיקים שבעבר היקום התרחב במהירות גדולה יותר מעכשיו. משתי משוואות פרידמן ניתן לקבל קשר שימושי נוסף:

$$(6) \quad \dot{\rho}c^2 = -3\frac{\dot{R}}{R}(\rho c^2 + P)$$

משוואה (6) נקראת לפעמים משוואת פרידמן השלישית כאשר ρ היא צפיפות המסה ו- ρc^2 היא צפיפות האנרגיה.

הפתרון של משוואות פרידמן עבור $R(t)$ מספר על היסטוריה ועתיד היקום.

במקרה של **יקום נשלט חומר**, הלחץ מכל המקורות קטן יותר מצפיפות החומר כלומר $P \ll \rho c^2$. אם נציב במשוואה (6) $P = 0$ נקבל:

$$(7) \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R} \rightarrow \rho \propto R^{-3}$$

במקרה של **יקום נשלט קרינה** שמגיע מחלקיקים אולטרה יחסותיים בעלי לחץ שהוא $\frac{1}{3}$ מצפיפות האנרגיה שלהם כלומר $P = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}\rho c^2$ נקבל ממשוואה (6):

$$(8) \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{R}}{R} \rightarrow \rho \propto R^{-4}$$

כדי למצוא את התלות של פקטור הסקאלה $R(t)$ בזמן נסתכל על תקופה קדומה בה - R היה מספיק קטן כך שניתן להזניח את האיבר השני במשוואת פרידמן הראשונה (משוואה (4)), כלומר $\left|\frac{kc^2}{R^2}\right| \gg \frac{8\pi G}{3}\rho$.

לכן, ביקום נשלט חומר כאשר $\rho \propto R^{-3}$ ניתן לקבל:

$$(9) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \sim \frac{1}{R^3} \rightarrow R(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$$

באותו אופן, עבור יקום נשלט קרינה עם $\rho \propto R^{-4}$ נקבל:

$$(10) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \sim \frac{1}{R^4} \rightarrow R(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$$

כעת, אם נניח כי יקום שטוח ($k = 0$), נוכל לקבל את הצפיפות ממשוואת פרידמן הראשונה כאשר נשתמש בכך ש- $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$:

$$(11) \quad \rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

כאשר ביקום שטוח ישנה צפיפות קריטית לכל זמן. הצפיפות הקריטית היום היא:

$$(12) \quad \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.4 \cdot 10^{11} M_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$$

נשים לב כי לפעמים נוח יותר לסמן את צפיפות היקום על ידי הפרמטר: $\Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$.

1.3 אנרגיה אפלה

ניתן להוסיף למשוואות פרידמן את הקבוע הקוסמולוגי. הקבוע הקוסמולוגי נכנס על מנת להסביר תצפיות שונות ואת הדינמיקה של היקום. עם הוספת הקבוע הקוסמולוגי Λ משוואות פרידמן מקבלות את הצורה הבאה:

$$(13) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

כאשר משוואת פרידמן השלישית נשארת קבועה.

על מנת למצוא את הקשר של פקטור הסקאלה בזמן ביקום נשלט אנרגיה אפלה נניח ש- R מספיק גדול כך שלאחר זמן רב הביטוי של Λ ישלוט באגף הימני של משוואה (13) ולכן נקבל:

$$(14) \quad H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx \frac{\Lambda}{3} \rightarrow R(t) \propto e^{Ht}$$

כאשר הקבוע הקוסמולוגי הופך להיות דומיננטי, היקום מאיץ בהתפשטות. אם Λ נשאר קבוע, ההתפשטות תימשך לנצח.

2. תרגילים

2.1. תרגיל 1

עבור יקום שטוח ונשלט על ידי אנרגיה אפלה ($k = 0, \Omega_\Lambda = 1$) בעל פקטור סקאלה R_0 ב- $t = 0$, מצאו את הקואורדינטה ה- *comoving* הרדיאלית, r_h של גלקסיות אשר יהיו באופק החלקיקים (*particle horizon*) בזמן t . הראו שבמקרה הזה r_h שואף לקבוע $\frac{c}{H_0 R_0}$ ולכן לא ניתן לראות גלקסיות מעבר ל- r_h .

2.2. תרגיל 2

א. בדומה לשאלה 1 - עבור יקום שטוח נשלט אנרגיה אפלה ($k = 0, \Omega_\Lambda = 1$), מצאו את רדיוס ה- *comoving* של גלקסיות r_{eh} שנמצאות באופק האירועים שלנו בזמן t בעתיד. כלומר, גלקסיות איתן לא נוכל לתקשר או במילים אחרות, אור הנשלח על ידינו בזמן t לעולם לא יגיע אל הגלקסיות האלו (כנ"ל גם בכיוון ההפוך), ולכן לעולם לא נוכל לראות אותן.

ב. הניחו כי קבוע האבל היום הוא $H_0 = 70 \frac{km}{s Mpc}$, והעריכו תוך כמה שנים הגלקסיות בצביר וירגו ($\sim 15 Mpc$) יגיעו לאופק האירועים.

2.3. תרגיל 3

ברדשיפט $z = 1100$ נוצרו אטומים (רקומבינציה), היקום נהיה שקוף לקרינה וה- *CMB* נוצר. דמיינו עולם שבו אטומים לא יכולים להיווצר. למרות שהיקום יישאר מיונן לנצח - עקב התפשטות היקום, הצפיפות תרד ובסוף תאפשר מעבר קרינה. מצאו את הרדשיפט z בו מצב זה יקרה עבור יקום שטוח עם

$$k = 0 \text{ וללא קבוע קוסמולוגי. הניחו כי } \Omega_B = 0.04 \text{ ו- } H_0 = 70 \frac{km}{s Mpc}$$