מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 10

משפט גאוס/ משפט הדיברגנץ

השטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך מעטפת סגורה כלשהי S , שווה לאינטגרל על הדיברגנץ של השדה בתוך נפח V התחום על ידי מעטפת זו :

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dV$$

נדגיש ונאמר כי הכיוון הנורמלי $\hat{n}$ יהיה תמיד מכוון כלפי חוץ מהמעטפת הסגורה S, לכן שטף חיובי (שלילי) יוגדר לפי סכום קווי השדה היוצאים (הנכנסים) מהמעטפת (למעטפת) הסגורה פחות סכום קווי השדה הנכנסים (יוצאים).

תרגיל 1

חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(x,y,2-2z)$ דרך המשטח הנוצר על ידי הפרבלואיד $z=1-x^2-y^2$ מעל מישור $x-y$.

1. על ידי חישוב ישיר של האינטגרל המשטחי
2. על ידי שימוש בחוק גאוס

פתרון

1. חישוב ישיר :
על הפרבולואיד

$$\vec{F}=\left(x,y,2-2\left(1-x^2-y^2\right)\right)=\left(x,y,2x^2+2y^2\right)$$
$$\hat{n}=\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

על מישור $x-y$

$$z=0\rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS&=\iint_D \left(x,y,2x^2+2y^2\right)\cdot(2x,2y,1)\,dxdy=\\&=\iint_D\left(4x^2+4y^2\right)dxdy=\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2rdrd\theta=\,8\pi\frac{r^4}{4}\bigg|_0^1=2\pi\end{aligned}$$

2. בעזרת משפט גאוס:

נשים לב שמשפט גאוס מדבר על שטף דרך משטח סגור וכאן יש לנו משטח פתוח, לכן נחשב את השטף דרך המשטח הסגור שכולל את הפרבלואיד והדיסקה שחוסמת אותו על מישור $x-y$ ונחסיר את השטף דרך הדיסקה.

$$\oiint \vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iint_{Disc}\vec{F}\cdot\hat{n}dS+\iint_S\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint\limits_V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dV$$

נחשב את הדיברגנץ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=1+1-2=0$$

כלומר, השטף הכולל הוא 0, נחשב את השטף דרך הדיסקה, כאשר $z=0$:

$$\iint_{Disc}\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iint_D\vec{F}\cdot(-\hat{z})\,dxdy=-\iint_D 2dxdy$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות

$$=-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta=-2\pi$$

ולכן השטף דרך הפרבולואיד הוא:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \oiint \vec{F}\cdot\hat{n}dS - \iint_{Disc}\vec{F}\cdot\hat{n}dS = 0-(-2\pi) = 2\pi$$

תרגיל 2

חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(0,0,z)$ דרך המשטח הנוצר על ידי הקונוס $z=\sqrt{x^2+y^2}$ והמישור $z=1$.

פתרון

נחשב בעזרת משפט גאוס:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 1$$

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV = \iiint dV$$

כלומר אנחנו צריכים פשוט לחשב את נפח הקונוס:
הבסיס שלו מקיים $\sqrt{x^2+y^2} = 1 = z$, כלומר זה עיגול ברדיוס $r=1$ והגובה הוא $h=1$. לכן:

$$V_{con} = \frac{1}{3}(base)\times(height) = \frac{\pi}{3}$$

לחילופין, ניתן לחשב את נפח הקונוס בקואורדינטות גליליות,

$$V_{con} = \int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^z \rho d\rho = 2\pi\int_0^1 \frac{z^2}{2}dz = \pi\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

חוק גאוס לכבידה

אם נרצה לפתח את השדה הכבידתי שנוצר כתוצאה ממסה נוכל לעשות זאת בעזרת חוק גאוס.
המקור של שדה הכבידה הוא המסה, או צפיפות המסה, לכן

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}\left(\vec{r}\right)=-4\pi G\rho\left(\vec{r}\right)$$

כאשר המינוס הוא מכיוון שהשדה הוא שדה מושך, ו-G הוא קבוע הכבידה.
נתאר לנו קליפה שמקיפה איזור מסויים ונעשה אינטגרל על כל השטח הכלוא בתוכה

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{g}\left(\vec{r}\right)dV=-4\pi G\iiint_V\rho\left(\vec{r}\right)dV=-4\pi GM$$

ממשפט גאוס נקבל

$$\oiint_S\vec{g}\left(\vec{r}\right)\cdot\hat{n}dS=-4\pi GM$$

כאשר יש סימטריה המאפשרת לפתור את האינטגרל ניתן למצוא מכאן את שדה הכבידה $\vec{g}\left(\vec{r}\right)$.

תרגיל 3

נתון גליל אינסופי $(-\infty\leq z\leq\infty)$ ברדיוס R עם צפיפות מסה אחידה ρ_0.

1. מהו השדה הגרביטציוני בתוך ההגליל?
2. מהו השדה הגרביטציוני מחוץ לגליל?
3. חזרו על התרגיל כאשר עכשיו צפיפות המסה של הגליל נתונה ע"י $\rho(r)=\frac{R\rho_0}{2r}$ (הגליל עדיין בעל רדיוס R).
   שרטטו את הפתרונות של הסעיפים השונים.

פתרון

צפיפות המסה תלויה רק במרחק מהציר

$$\rho\left(\vec{r}\right)=\rho\left(r\right)=\begin{cases}\rho_0 & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}$$

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r})dV=-4\pi G\iiint_V\rho(\vec{r})dV$$

1. נדמיין לעצמנו קליפה בצורת גליל הנמצאת בתוך הגליל שלנו, ברדיוס $r < R$ ובאורך h .
נחשב את האינטגרל על הצפיפות בתוך הגליל

$$-4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r})dV = -4\pi G \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r'dr' \int_0^h dz\rho_0 = -4\pi G\rho_0 \pi r^2 h$$

מחוק גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r})dV = \oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n}dS$$

מכיוון שצפיפות המסה לא משתנה בכיוון $\hat{z}$ ניתן להניח שאין שדה בכיוון הזה, כי כל שדה שתיצור המסה יתבטל עם שדה שתיצור מסה שווה בכיוון ההפוך. לכן השטף דרך הבסיסים יתאפס וצריך לחשב רק את השטף דרך הגליל, שיהיה רק בכיוון הרדיאלי ויהיה תלוי רק ב-r, המרחק מציר z

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(r) = g(r)\hat{r}$$

הנורמל של המשטח הוא גם באותו כיוון $\hat{n} = \hat{r}$

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \hat{n}dS = \int_0^{2\pi} rd\theta \int_0^h dzg(r) = 2\pi hrg(r)$$

ומכאן

$$2\pi hrg(r) = -4\pi G\rho_0 \pi r^2 h$$

$$g(r) = -2\pi G\rho_0 r$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -2\pi G\rho_0 r\hat{r}$$

השדה גדל ליניארית עם ההתרחקות מהציר, כי המסה שבינינו לבין המרכז גדלה. שימו לב שהתוצאה לא תלויה באורך הגליל שבחרנו h.

2. עכשיו נדמיין שהקליפה שלנו היא ברדיוס $R < r$ ובאותו אורך h
נחשב את האינטגרל על הצפיפות בתוך הגליל

$$-4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r})dV = -4\pi G \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr \int_0^h dz\rho_0 = -4\pi G\rho_0 \pi R^2 h$$

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}dS=\int_0^{2\pi} rd\theta\int_0^h dzg(r)=2\pi hrg(r)$$

ומכאן

$$2\pi hrg(r)=-4\pi G\rho_0\pi R^2 h$$

$$g(r)=-\frac{2\pi G\rho_0 R^2}{r}$$

$$\vec{g}(\vec{r})=-\frac{2\pi G\rho_0 R^2}{r}\hat{r}$$

בניגוד למקרה של מסה כדורית כאן השדה הולך כמו $\frac{1}{r}\sim$ ולא כמו $\frac{1}{r^2}\sim$ כי המסה של הגליל היא אינסופית

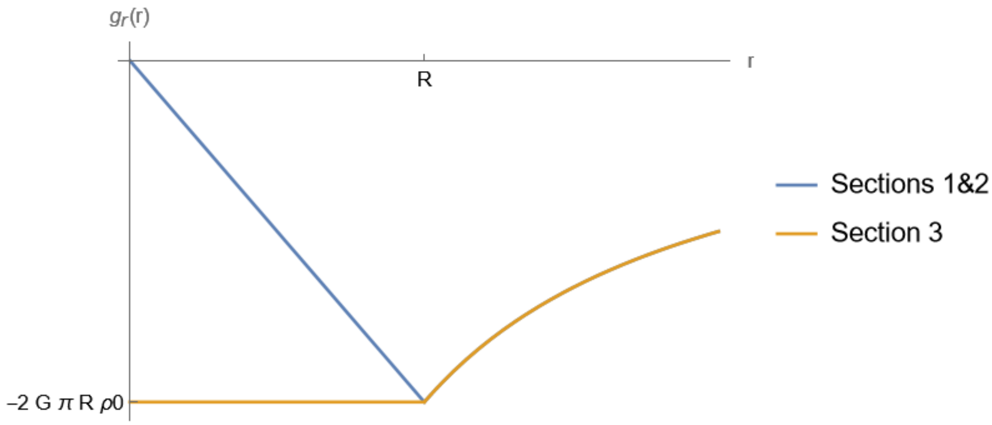
$$\vec{g}\left(\vec{r}\right)=\vec{g}\left(r\right)=-2\pi G\rho_0\hat{r}\begin{cases} r & r<R \\ \frac{R^2}{r} & r>R \end{cases}$$

3. ראשית נשים לב כי $\rho(r)$ עדיין מקיים את אותן סימטריות כמו בסעיפים הקודמים. כמו כן, המסה הכלואה בתוך מעטפת גלילית ברדיוס $r>R$ ובגובה h זהה למסה של הגליל עם צפיפות מסה אחידה,

$$\iiint_V \rho(r')dV=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r'\frac{R\rho_0}{2r'}dr'\int_0^h dz=h\pi R^2\rho_0$$

לכן, השדה מחוץ לגליל נשאר אותו הדבר.
בתוך הגליל

$$2\pi hrg(r)=-4\pi G\iiint_V \rho(\vec{r})dV=-4\pi G\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^r r'\frac{R\rho_0}{2r'}dr'\int_0^h dz=-4\pi^2 GhR\rho_0 r$$
$$\Rightarrow g(r)=-2\pi GR\rho_0$$



תרגיל 4

בדקו את משפט גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F}(x, y, z) = z^3 \hat{z}$$

כאשר V הוא נפח הכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

עשו זאת בשלבים הבאים:

1. חשבו את $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$
2. חשבו את האינטגרל

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$$

3. חשבו את שטף השדה היוצא מתוך הנפח:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

פתרון

1. חשבו את

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \partial_x(0)+\partial_y(0)+\partial_z(z^3)\\ &= 3z^2\end{aligned}$$

2. נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 3r^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV &= \int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 dr\,r^2\sin\theta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\\ &= 3\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\cos^2\theta\int_0^1 dr\,r^4\\ &= 3\cdot 2\pi\int_{-1}^{1} du\,u^2\int_0^1 dr\,r^4\\ &= 3\cdot 2\pi\left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{1}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1\\ &= 3\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\\ &= \frac{4\pi}{5}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהצבה $u=-\cos\theta$.

3. הנורמל הוא $\hat{n}=\hat{r}$ בקואורדינטות כדוריות, לכן

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = z^3\hat{z}\cdot\hat{r} = z^3\cos\theta = r^3\cos^4\theta = \cos^4\theta$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו בכך שהמשטח נמצא ב-$r=1$. השטף הוא

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\cos^4\theta = 2\pi\int_{-1}^{1} du\,u^4 = 2\pi\left.\frac{u^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{5}$$

כאשר שוב השתמשנו בהצבה $u=-\cos\theta$.