אסטרונומיה כללית - תרגול 8

מתרגל: עידו אופיר

תוכן עניינים

1. קוסמולוגיה

1.1. רדשיפט קוסמולוגי

נסתכל על אור המגיע מגלקסיה הנמצאת בקואורדינטה רדיאלית comoving המסומנת ב - r_e. שני פולסים יוצאים בזמנים $t_0, t_0 + \Delta t_0$ ומגיעים לכדור הארץ בזמנים $t_e, t_e + \Delta t_e$ בהתאמה. כיוון שמסלול של אור מוגדר על ידי: $ds^2 = 0$, עבור פוטון הנע במטריקת $FLRW$ ניתן לרשום:

$$0 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} \tag{1}$$

ממשוואה (1) ניתן למצוא את הדרך שעושים שני הפולסים:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \qquad \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{2}$$

כיוון ש - r_e היא קואורדינטה רדיאלית *comoving*, צד ימין של שני האינטגרלים לא תלוי בזמן ולכן שווה. מכאן נוכל לקבל:

$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = 0 \tag{3}$$

נבטא את האינטגרל הראשון כסכום של שלושה אינטגרלים:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = 0 \tag{4}$$

נשים לב שהאינטגרל הראשון והרביעי מתבטלים. כעת, נניח כי $\Delta t \ll 1$ ונוכל לקרב את האינטגרלים באופן הבא:

$$\frac{\Delta t_e}{R(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)} \tag{5}$$

נזכור כי $\Delta t_e = \frac{1}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{c}$ וגם $\Delta t_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{c}$ ונקבל:

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} = 1 + z \tag{6}$$

כאשר z הוא הרדשיפט הקוסמולוגי. ככל שהאור שאנו מקבלים נפלט בזמן מוקדם יותר בעבר (ככל שהמקור רחוק יותר), כך הרדשיפט גדול יותר.

1.2. תרגיל 1

ברדשיפט $z = 1100$ נוצרו אטומים (רקומבינציה), היקום נהיה שקוף לקרינה וה - *CMB* נוצר. דמיינו עולם שבו אטומים לא יכולים להיווצר. למרות שהיקום יישאר מיונן לנצח - עקב התפשטות היקום, הצפיפות תרד ובסוף תאפשר מעבר קרינה. מצאו את הרדשיפט z בו מצב זה יקרה עבור יקום שטוח עם $k = 0$ וללא קבוע קוסמולוגי. הניחו כי $\Omega_B = 0.04$ ו - $H_0 = 70 \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}$

2. מדידת מרחקים

במרחב מתפשט בעל עקמומיות, ניתן למדוד מרחק במספר צורות. מרחקים אלו יהיו תלויים בתכונות וההיסטוריה של המרחב את המרחקים ניתן למדוד באמצעות מטריקת $FLRW$ וממשוואות פרידמן ולאחר מכן להשוות לתצפיות.

2.1. *Angular diameter distance*

באסטרונומיה, *angular diameter distance* נמדד על ידי קוטר האובייקט, והזווית המרחבית אותו הוא תופס בשמיים כמו שנמדד מכדור הארץ:

$$d_A = \frac{d}{\theta} \tag{7}$$

המרחק d_A תלוי בקוסמולוגיה של היקום. ולכן נרצה לקשר בין הרדשיפט ל - d_A. ה - proper distance ממקור מסוים הוא rR_0 כאשר r היא קואורדינטת comoving ו - R_0 הוא פקטור הסקאלה היום. עבור מסלולים של אור (null geodesics) מקבלים:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{8}$$

עבור יקום שטוח ונשלט חומר נקבל:

$$\frac{t_0^{\frac{2}{3}} c}{R_0} \int_{t_e}^{t_0} t^{-\frac{2}{3}} dt = \int_0^r dr$$
$$rR_0 = 3ct_0 \left(1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 3ct_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \tag{9}$$

בגלל שאנחנו יודעים שבזמן הפליטה פקטור הסקאלה היה קטן פי $1 + z$, נוכל לקבל את ה - *angular diameter distance*:

$$d_A = \frac{rR_0}{1+z} = 3ct_0 \left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{10}$$

אם גוזרים את הביטוי במשוואה (10) נראה שהוא מקבל מקסימום בנקודה $z_{max} = \frac{5}{4}$.

נוסף על כך, d_A היא לא פונקציה עולה מונוטונית כמו שהיינו מצפים אלה מגיעה למקסימום ב - z_{max} ואז יורדת עם עלייתו של הרדשיפט המסקנה היא שלא נוכל לצפות באובייקט בקוטר d, בזווית קטנה יותר מאשר $\theta_{min} = \frac{d}{d_A(z_{maz})}$.

אובייקטים ברדשיפט $z > z_{max}$ יראו גדולים יותר על השמיים ככל שהם רחוקים יותר. התופעה המוזרה הזו היא תוצאה של אור אשר נע בזמן למרחקים שונים ביקום מתרחב. אובייקט ברדשיפט גבוהה יכול היה להיות קרוב אלינו בזמן הפליטה יותר מאשר אובייקט בגודל זהה ברדשיפט נמוך יותר בניגוד לעובדה שגורמים בעלי רדשיפט גבוהה כרגע רחוקים יותר.

2.2. Luminosity distance

נגדיר את ה - Luminosity distance בצורה הבאה :

$$d_L = rR_0(1+z) \tag{11}$$

נזכור כי ה - proper distance מוגדר על ידי $d_p = R_0 r$ וה - angular diameter distance מוגדר על ידי $\frac{rR_0}{1+z}$. מכאן נקבל את נוסחה המקשרת בין שלושת המרחקים :

$$d_L = (1+z)d_p = (1+z)^2 d_A \tag{1}$$

3. תרגילים

3.1. תרגיל 1

א. מהו שטף האנרגיה הנצפה של פוטונים ממקור עם לומינוסיטי L במרחק d_L?

ב. מצא את ה - *Luminosity distance* - $d_L(z)$ עבור יקום שטוח $(k=0)$ ללא קבוע קוסמולוגי.

3.2.תרגיל 2

השתמשו במשוואות פרידמן הראשונה עם קבוע קוסמולוגי שונה מאפס, על מנת להראות שביקום שטוח ונשלט חומר ה - proper distance הוא :

$$rR_0 = \int \frac{c dz}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}}$$