מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 11

מטריצות

מטריצה M מסדר של $m \times n$ היא מטריצה בעלת m שורות ו-n עמודות, הרכיב בשורה ה i- והעמודה ה-j יסומן M_{ij}.
פעולות על מטריצות:

1. כפל במספר: $(cM)_{ij} = cM_{ij}$
2. חיבור מטריצות (מאותו סדר): $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$
3. שחלוף (transpose): $\left(M^T\right)_{ij} = M_{ji}$
4. כפל מטריצות, כאשר מכפילים מטריצה מסדר $m \times n$ במטריצה מסדר $n \times \ell$ מקבלים מטריצה מסדר $m \times \ell$:

$$L_{ik} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} N_{jk} = M_{ij} N_{jk}$$

כלומר, הרכיב בכל מיקום במטריצה הוא סכום מכפלת הרכיבים של השורה בה הוא נמצא במטריצה הראשונה עם העמודה בה הוא נמצא במטריצה השנייה. כפל מטריצות הוא פעולה דיסטריבוטיבית $(A(B+C) = AB + AC)$ ואסוציאטיבית $(A(BC) = (AB)C)$ אבל לא בהכרח קומוטטיבית $(AB \neq BA)$.

מטריצות ריבועיות

1. קיימת מטריצת יחידה I ביחס לכפל המקיימת $MI = IM = M$

$$I_{ij} = \delta_{ij}$$

2. למטריצה M קיימת מטריצה הופכית M^{-1} המקיימת $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ אם ורק אם $\det M \neq 0$. למטריצה מסדר 2

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$$

3. מטריצה ריבועית נקראת אורתוגונלית אם $M^T = M^{-1}$

$$M^T M = M^{-1} M = I$$

$$M^T_{il} M_{lj} = M_{li} M_{lj} = \delta_{ij}$$

כלומר, מכפלה של כל עמודה בעמודה אחרת (או שורה בשורה אחרת) תתאפס ומכפלה של עמודה בעצמה שווה 1.

סיבובים במרחב

נגדיר סיבוב אקטיבי כסיבוב של תוכן המרחב וסיבוב פסיבי כסיבוב של מערכת הצירים.
סיבוב פסיבי של מערכת הצירים שקול לסיבוב אקטיבי של תוכן המרחב בכיוון ההפוך. המטריצה לסיבוב אקטיבי היא:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

סיבוב בכיוון ההפוך ייתן

$$R(-\theta) = R^T(\theta) = R^{-1}(\theta)$$

כלומר, מטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות.
בשלושה מימדים מטריצות הסיבוב הן

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$
$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1

נתונים הווקטורים

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ 1\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\frac{8}{3}}\\ 2\end{pmatrix}$$

חשבו את מכפלת הווקטורים
לאחר מכן סובבו את הווקטורים ב $45°$ סביב ציר $\hat{y}$ ושוב ב $30°$ סביב ציר $\hat{x}$ וחשבו את מכפלתם שוב

פתרון

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{v}^T\vec{u}=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\frac{8}{3}}\\ 2\end{pmatrix}=-1+\frac{4}{3}+2=\frac{7}{3}$$

הסיבוב יהיה

$$\vec{v}'=R_x\left(\frac{\pi}{6}\right)R_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{v}$$

$$\vec{u}'=R_x\left(\frac{\pi}{6}\right)R_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{u}$$

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{\frac{8}{3}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{8}} \\ \frac{7}{\sqrt{24}} \end{pmatrix}$$

נכפיל את הווקטורים המסובבים :

$$\vec{v}' \cdot \vec{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{8}} \\ \frac{7}{\sqrt{24}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{7}{\sqrt{24}} = \frac{7}{3}$$

טנזורים

סקלר - (טנזור מדרגה 0) מספר שאינו משתנה תחת טרנספורמציית סיבוב פסיבית.
ווקטור - (טנזור מדרגה 1) משתנה תחת טרנספורמציית סיבוב כך :

$$\vec{v}' = R^T \vec{v}$$

$$v_i' = R_{ij}^T v_j$$

טנזור מדרגה 2 משתנה כך :

$$A_{ij}' = R_{il}^T R_{jm}^T A_{lm} = R_{il}^T A_{lm} R_{mj}$$

$$A' = R^T A R$$

תרגיל 2

נתונים ווקטורים $\vec{v},\vec{u}$ וטנזורים מדרגה 2 A,B. הוכיחו שהביטוי $\vec{v}^T AB\vec{u}$ הוא סקלר

פתרון

כדי לבדוק האם ביטוי הוא סקלר צריך לבדוק איך הוא משתנה תחת סיבוב פסיבי
נעבור לכתיב אינדקסים

$$\begin{aligned}\vec{v}'_i A'_{ij} B'_{jl} u'_l =& R^T_{im} v_m R^T_{in} R^T_{jo} A_{no} R^T_{jp} R^T_{lq} B_{pq} R^T_{lr} u_r = \\ =& R^T_{im} R^T_{in} R^T_{jo} R^T_{jp} R^T_{lq} R^T_{lr} v_m A_{no} B_{pq} u_r = \\ =& R_{mi} R^T_{in} R_{oj} R^T_{jp} R_{ql} R^T_{lr} v_m A_{no} B_{pq} u_r = \end{aligned}$$

נשתמש בזהות $R_{il} R^T_{lj} = \delta_{ij}$ הנובעת מכך שמטריצות הסיבוב הן אורתוגונליות.

$$= \delta_{mn} \delta_{op} \delta_{qr} v_m A_{no} B_{pq} u_r = v_m A_{mo} B_{oq} u_q = \vec{v}^T AB\vec{u}$$

הביטוי לא השתנה תחת סיבוב ולכן הוא סקלר.
ניתן להראות זאת גם בכתיבה מטריציונית:

$$\begin{aligned}\vec{v}'^T A' B' \vec{u}' =& \left(R^T \vec{v}\right)^T R^T A R R^T B R R^T \vec{u} = \\ =& \vec{v}^T R R^T A R R^T B R R^T \vec{u} = \vec{v}^T AB\vec{u}\end{aligned}$$

תרגיל 3

הראו שטרנספורמציית הסיבוב בשני מימדים היא טנזור אינווריאנטי

פתרון

טרנספורמציית הסיבוב היא

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

נבדוק כל רכיב בנפרד

$$R^T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$ אנחנו מסובבים על ידי

$$\begin{aligned}
R'_{11} =& R^T_{1i} R^T_{1j} R_{ij} = \\
=& R^T_{11} R^T_{11} R_{11} + R^T_{11} R^T_{12} R_{12} + R^T_{12} R^T_{11} R_{21} + R^T_{12} R^T_{12} R_{22} = \\
=& \cos^2(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin^2(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& \cos^2(\alpha)\cos(\theta) + \sin^2(\alpha)\cos(\theta) = \cos(\theta) = R_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_{12} =& R^T_{1i} R^T_{2j} R_{ij} = \\
=& R^T_{11} R^T_{21} R_{11} + R^T_{11} R^T_{22} R_{12} + R^T_{12} R^T_{21} R_{21} + R^T_{12} R^T_{22} R_{22} = \\
=& -\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos^2(\alpha)\sin(\theta) - \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& -\cos^2(\alpha)\sin(\theta) - \sin^2(\alpha)\sin(\theta) = -\sin(\theta) = R_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_{22} =& R^T_{2i} R^T_{2j} R_{ij} = \\
=& R^T_{21} R^T_{21} R_{11} + R^T_{21} R^T_{22} R_{12} + R^T_{22} R^T_{21} R_{21} + R^T_{22} R^T_{22} R_{22} = \\
=& \sin^2(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& \sin^2(\alpha)\cos(\theta) + \cos^2(\alpha)\cos(\theta) = \cos(\theta) = R_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_{21} =& R^T_{2i} R^T_{1j} R_{ij} = \\
=& R^T_{21} R^T_{11} R_{11} + R^T_{21} R^T_{12} R_{12} + R^T_{22} R^T_{11} R_{21} + R^T_{22} R^T_{12} R_{22} = \\
=& -\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\theta) = \\
=& \sin^2(\alpha)\sin(\theta) + \cos^2(\alpha)\sin(\theta) = \sin(\theta) = R_{21}
\end{aligned}$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

משוואה דיפרנציאלית מסדר שני היא משוואה מהצורה:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f\left(t, x\left(t\right), \frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

המשוואה נקראת ליניארית אם היא מהצורה:

$$\ddot{x} + p\left(t\right)\dot{x} + q\left(t\right)x = g\left(t\right)$$

אם $g\left(t\right) = 0$ המשוואה נקראת הומוגנית.
בעייה הכוללת משוואה דיפרנציאלית ושני תנאי התחלה

$$\begin{aligned} x\left(t_0\right) =& x_0 \\ \dot{x}\left(t_0\right) =& v_0 \end{aligned}$$

נקראת בעיית תנאי התחלה.
משפט הקיום והיחידות אומר שאם הפונקציות של המקדמים רציפות בתחום, **קיים** פתרון לבעיית תנאי התחלה על פני התחום והפתרון הוא **יחיד**.
פתרון לבעיית תנאי התחלה יורכב תמיד מסופרפוזיציה של שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה הדיפרנציאלית.

$$x\left(t\right) = a_1 x_1\left(t\right) + a_2 x_2\left(t\right)$$

משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר שני עם מקדמים קבועים

עבור המשוואה

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

נציב פתרון $x = e^{rt}$ ונקבל את המשוואה האופיינית

$$r^2 + pr + q = 0$$

שהפתרונות שלה הם

$$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

נגדיר $D=p^2-4q$
ונקבל שלושה מצבים

1. $D>0$, נקבל שני פתרונות והפתרון הכללי יהיה סופרפוזיציה של שניהם:

$$x\left(t\right)=a_1e^{r_1t}+a_2e^{r_2t}$$

כאשר בבעיית תנאי התחלה a_1,a_2 יקבעו כך שיקיימו את תנאי ההתחלה שלנו.

2. $D=0$, נקבל רק פתרון אחד $r=-\frac{p}{2}$ מכיוון שלבעיית תנאי התחלה צריך שני פתרונות בלתי תלויים ניקח פתרון נוסף $x_2\left(t\right)=te^{rt}$, כך שהפתרון הכללי יהיה:

$$x\left(t\right)=a_1e^{rt}+a_2te^{rt}$$

3. $D<0$, נקבל שני פתרונות צמודים אחד של השני והפתרון הכללי יהיה:

$$x\left(t\right)=a_1e^{-\lambda t}\cos\left(\mu t\right)+a_2e^{-\lambda t}\sin\left(\mu t\right)$$

כאשר $\lambda=\frac{p}{2}$ ו- $\mu=\frac{\sqrt{|D|}}{2}$.

המשוואה הזו מתארת תנועה של אוסילטור הרמוני, למשל קפיץ. כאשר הרכיב של $\dot{x}$ מתאר כוח שמרסן את הקפיץ, חיכוך או גרר. אם המשוואה לא הומגונית אז $g\left(t\right)$ מתאר כוח מאלץ שמגביר את התנודות.

תרגיל 1

פתרו את המשוואה:

$$\ddot{x}+8\dot{x}+7x=0$$

עם תנאי ההתחלה

1. $x\left(0\right)=2,\dot{x}\left(0\right)=0$
2. $x\left(0\right)=0,\dot{x}\left(0\right)=2$

פתרון

נציב $x\left(t\right)=e^{rt}$
ונקבל את המשוואה האופיינית:

$$r^{2}+8r+7=0$$

$$r_{1,2}=-4\pm\frac{\sqrt{64-28}}{2}-4\pm3$$

$$r_{1}=-1,\quad r_{2}=-7$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל את הפתרון הכללי:

$$x\left(t\right)=a_{1}e^{-t}+a_{2}e^{-7t}$$

1. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_{1}+a_{2}=2\rightarrow a_{2}=2-a_{1}$$

$$\dot{x}\left(0\right)=-a_{1}-7a_{2}=-a_{1}-7\left(2-a_{1}\right)=6a_{1}-14=0$$

$$\rightarrow a_{1}=\frac{7}{3},\quad a_{2}=-\frac{1}{3}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=\frac{7}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-7t}$$

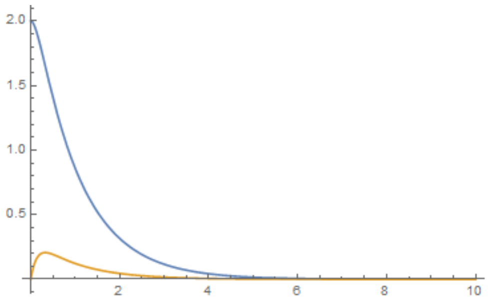
2. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_{1}+a_{2}=0\rightarrow a_{2}=-a_{1}$$

$$\dot{x}(0) = -a_1 - 7a_2 = a_1(-1+7) = 6a_1 = 2 \rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-7t}}{3}$$



המשוואה הזו מתארת ריסון חזק כך שהקפיץ לא עושה כלל תנודות אלא דועך מיד לעצירה.

תרגיל 2

פתרו את המשוואה:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$$

עם תנאי ההתחלה

1. $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$
2. $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$

פתרון

נציב $x(t) = e^{rt}$
ונקבל את המשוואה האופיינית:

$$r^2+2r+4=0$$

$$r_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{4-16}}{2}-1\pm i\sqrt{3}$$

$$r_1=-1+i\sqrt{3},\quad r_2=-1-i\sqrt{3}$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל את הפתרון הכללי:

$$x\left(t\right)=a_1e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

1. נציב את תנאי ההתחלה

$$x\left(0\right)=a_1=2$$

$$\dot{x}\left(t\right)=-a_1e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\sqrt{3}a_1e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)-a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}a_2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$\dot{x}\left(0\right)=-2+\sqrt{3}a_2=0\rightarrow a_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

2. נציב את תנאי ההתחלה

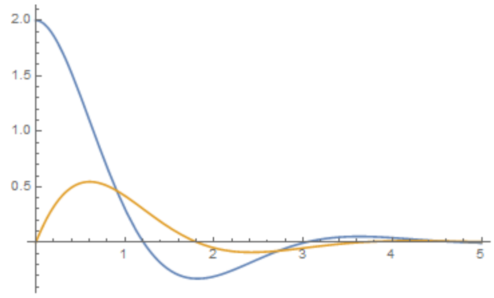
$$x\left(0\right)=a_1=0$$

$$\dot{x}\left(t\right)=-a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}a_2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$\dot{x}\left(0\right)=\sqrt{3}a_2=2\rightarrow a_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$



המשוואה הזו מתארת ריסון חלש כך שהקפיץ מתנודד אבל האמפליטודה קטנה עד לעצירה.