מערכות קואורדינטות עקומות

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

עד כה, בדרך כלל עבדנו עם רכיבי וקטורים בקואורדינטות הקרטזיות (x, y, z). יחד עם זאת, ראינו כבר שבהרבה מקרים נוח יותר לעשות חישובים מסוימים (כגון אינטגרלים מרובים) בקואורדינטות אחרות שיותר מתאימות לסימטריה של הבעיה. בפרק זה נלמד, בין השאר, לעבוד עם וקטורים שרכיביהם נתונים במערכות קואורדינטות אחרות. לדוגמה, בבעיות עם סימטריה גלילית נרצה לעבוד עם וקטורי הבסיס $\{\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}\}$ במקום $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, כלומר נרצה לרשום וקטורים באופן הבא:

$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z} \tag{1}$$

כאשר $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ ו־$\hat{z}$ הם וקטורי יחידה המצביעים בכיוון בו הקואורדינטה הנתונה גדלה בעוד שהקואורדינטות האחרות אינן משתנות. נלמד גם להפעיל אופרטורים וקטוריים (גרדיאנט, דיברגנץ, רוטור) בקואורדינטות כאלה.

אלמנט האורך וקואורדינטות עקומות אורתוגונליות

בקואורדינטות הקרטזיות (x, y, z), אלמנט האורך ds, כלומר הגודל של וקטור העתק אינפיניטסימלי $d\vec{r}$, נתון על ידי

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2}$$

לעומת זאת, לדוגמה בקואורדינטות הגליליות (ρ, φ, z)

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{3}$$

ניתן לראות זאת גיאומטרית באיור 1 (כאשר dz מתווסף במאונך לדף). ניתן לקבל תוצאה זו גם אלגברית – נבטא את הקואורדינטות הקרטזיות כפונקציות של הקואורדינטות הגליליות:

$$x = \rho \cos\varphi\,, \quad y = \rho \sin\varphi\,, \quad z = z \tag{4}$$

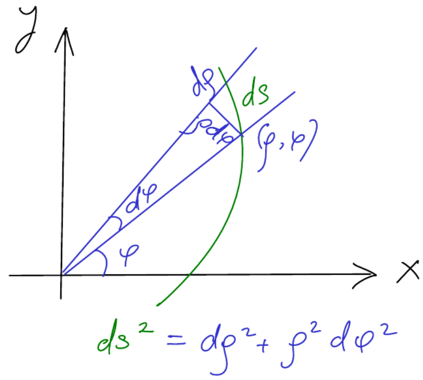
כעת, נשתמש בכך שעבור פונקציה כללית $f(q_1, q_2, q_3)$ מתקיים

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3 \tag{5}$$

ונקבל

$$dx = \cos\varphi \, d\rho - \rho \sin\varphi \, d\varphi \tag{6}$$
$$dy = \sin\varphi \, d\rho + \rho \cos\varphi \, d\varphi \tag{7}$$
$$dz = dz \tag{8}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.



איור 1: אלמנט אורך בקואורדינטות פולריות.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{9}$$

נשים לב שאיברים מהצורה $d\rho d\varphi$ התבטלו ב־ds^2. מערכת קואורדינטות שבאלמנט האורך שלה לא מופיעים איברים מעורבים נקראת מערכת קואורדינטות **אורתוגונלית**. מבחינה גיאומטרית, למערכת כזו מתקיים ש**משטחי הקואורדינטות** ניצבים זה לזה. למערכת גלילית, לדוגמה, משטחי הקואורדינטות הם $\rho = c_1$ (גלילים קונצנטריים), $\varphi = c_2$ (חצאי מישורים), ו־$z = c_3$ (מישורים). בכל נקודה, שלושת משטחי הקואורדינטות שעוברים דרך הנקודה ניצבים זה לזה. כעת, נסתכל על חיתוכים של שני משטחי קואורדינטות, המייצרים מסילות, הנקראות **מסילות קואורדינטות**. נבנה את המשיקים למסילות אלה. לדוגמה, החיתוך של גליל $\rho = c_1$ עם חצי מישור $\varphi = c_2$ נותן מסילה בכיוון ציר z; נקרא למשיק שלה $\hat{e}_z$. החיתוך של גליל $\rho = c_1$ עם מישור $z = c_3$ נותן מעגל, ונקרא למשיק $\hat{e}_\varphi$. החיתוך של מישור $z = c_3$ עם חצי מישור $\varphi = c_2$ נותן קו בכיוון הרדיאלי, ונקרא למשיק שלו $\hat{e}_\rho$. את המערכת $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$ נקפיד לבחור כמערכת ימנית. מערכת קואורדינטות כזו, שעבורה המסילות אינן כולן קווים ישרים, נקראת **מערכת עקומה**, ובדוגמה שלנו היא **מערכת עקומה אורתוגונלית**. במערכת שאינה אורתוגונלית הווקטורים $\hat{e}_i$ אינם ניצבים זה לזה.

גורמי הסקלה

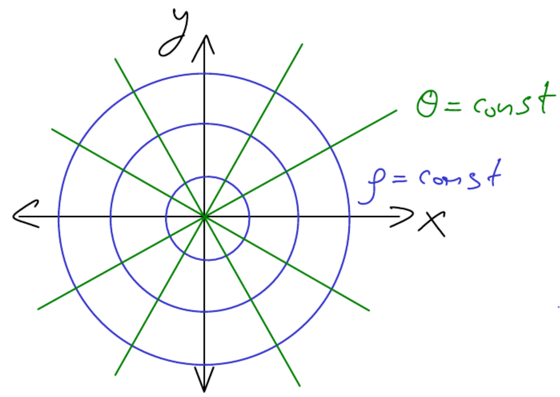
ניעזר בסימונים שבטבלה:

קואורדינטות קרטזיות	קואורדינטות עקומות	דוגמה: קואורדינטות גליליות
$x_1 = x$	q_1	$q_1 = \rho$
$x_2 = y$	q_2	$q_2 = \varphi$
$x_3 = z$	q_3	$q_3 = z$

ניתן לכתוב את הקואורדינטות הקרטזיות כפונקציה של הקואורדינטות העקומות ולהיפך:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \tag{10}$$

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \tag{11}$$



איור 2: משטחי הקואורדינטות בקואורדינטות פולריות.

נסמן את וקטורי הבסיס הסטנדרטי $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$ ו־$\hat{x}_3 = \hat{z}$ ונכתוב

$$(dx_1, dx_2, dx_3) = d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \tag{12}$$

נגדיר את **גורמי הסקלה** h_i **(scale factors)** ואת וקטורי הבסיס העקום $\hat{e}_i$ לפי

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \hat{e}_1 \,, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = h_2 \hat{e}_2 \,, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = h_3 \hat{e}_3 \tag{13}$$

במילים אחרות, כיוונו של

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \tag{14}$$

מגדיר את וקטור הבסיס $\hat{e}_i$ (שהוא וקטור יחידה) וגודלו נותן את h_i.

במונחים של h_i, ההעתק האינפיניטסימלי $d\vec{r}$ נתון במערכת העקומה על ידי

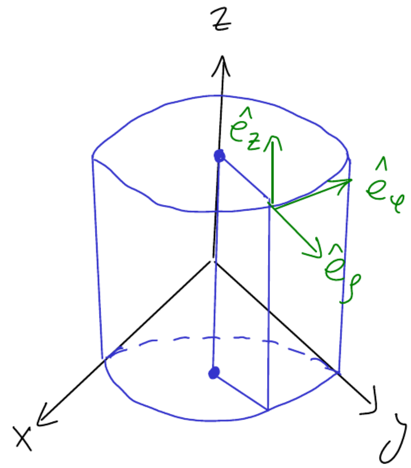
$$d\vec{r} = \sum_i h_i \, dq_i \, \hat{e}_i = (h_1 dq_1, \; h_2 dq_2, \; h_3 dq_3) \tag{15}$$

עבור מערכת אורתוגונלית, $\hat{e}_i$ אורתונורמליים:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \tag{16}$$

ואלמנט האורך נתון על ידי

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2 \tag{17}$$



איור 3: קואורדינטות גליליות.

דוגמה: עבור <u>הקואורדינטות הגליליות</u> מתקיים

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\hat{x} + \rho\sin\varphi\,\hat{y} + z\hat{z} \tag{18}$$

נגזור ונכתוב כווקטור יחידה כפול גודל:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y} \equiv h_\rho\hat{\rho} \tag{19}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \rho\,\underbrace{(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y})}_{\hat{\varphi}} \equiv h_\varphi\hat{\varphi} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \hat{z} \equiv h_z\hat{z} \tag{21}$$

כאשר

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1 \tag{22}$$

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y} \tag{23}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y} \tag{24}$$

$$\hat{z} = \hat{z} \tag{25}$$

נשים לב שבאופן כללי גורמי הסקלה h_i ווקטורי הבסיס $\hat{e}_i$ הם תלויי־מיקום, כמו שקיבלנו כאן עבור h_φ שתלוי ב־ρ, ו־$\hat{\rho}$ ו־$\hat{\varphi}$ שתלויים ב־φ. זה שונה מהקואורדינטות הקרטזיות, בהן כל גורמי הסקלה שווים ל־1 ווקטורי הבסיס מצביעים לאותם הכיוונים בכל נקודה במרחב.

עם גורמי הסקלה ממשוואה (22) והנוסחה (17) נוכל שוב לקבל את אלמנט האורך שקיבלנו במשוואה (9).

באופן דומה, כפי שתראו בתרגול, עבור הקואורדינטות הכדוריות מקבלים

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r\sin\theta \tag{26}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \tag{27}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \tag{28}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \tag{29}$$

פרישת וקטור

נכתוב וקטור בבסיס הסטנדרטי ובבסיס החדש:

$$\vec{v} = v_i\,\hat{x}_i = \tilde{v}_i\,\hat{e}_i \tag{30}$$

רכיבי הווקטור בבסיס החדש נתונים על ידי

$$\tilde{v}_i = \vec{v}\cdot\hat{e}_i \tag{31}$$

דוגמה: נתון השדה הווקטורי

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{32}$$

בקואורדינטות הגליליות, שווקטורי הבסיס שלהן $\hat{e}_i$ נתונים על ידי משוואות (23)–(25) ו־

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\hat{x} + \rho\sin\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{33}$$

הרכיבים יהיו

$$\tilde{v}_\rho(\vec{r}) = (\rho\cos\varphi\,\hat{x} + \rho\sin\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}) = \rho \tag{34}$$

$$\tilde{v}_\varphi(\vec{r}) = (\rho\cos\varphi\,\hat{x} + \rho\sin\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}) = 0 \tag{35}$$

$$\tilde{v}_z(\vec{r}) = (\rho\cos\varphi\,\hat{x} + \rho\sin\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot\hat{z} = z \tag{36}$$

כלומר

$$\vec{v}(\vec{r}) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z} \tag{37}$$

דוגמה: נתון השדה הווקטורי

$$\vec{w}(\vec{r}) = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{38}$$

בקואורדינטות הגליליות רכיביו יהיו

$$\tilde{w}_\rho(\vec{r}) = (-\rho\sin\varphi\,\hat{x} + \rho\cos\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}) = 0 \tag{39}$$

$$\tilde{w}_\varphi(\vec{r}) = (-\rho\sin\varphi\,\hat{x} + \rho\cos\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}) = \rho \tag{40}$$

$$\tilde{w}_z(\vec{r}) = (-\rho\sin\varphi\,\hat{x} + \rho\cos\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z})\cdot\hat{z} = z \tag{41}$$

כלומר

$$\vec{w}(\vec{r}) = \rho\,\hat{\varphi} + z\,\hat{z} \tag{42}$$

דוגמה: נתאר את מיקומו של חלקיק בזמן נתון ע"י ערכי הקואורדינטות הגליליות ρ, φ, z ונרצה לרשום את וקטור המהירות שלו במונחים של קצבי השינוי $\dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}$. כלומר נרצה למצוא את הביטוי האנלוגי ל־

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z} \tag{43}$$

כדי לעשות זאת, נרשום את וקטור המיקום של החלקיק כ־

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho}(\varphi) + z\,\hat{z} \tag{44}$$

ונגזור אותו לפי הזמן כדי לקבל את המהירות:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\hat{\rho}(\varphi) + \rho\,\frac{d}{dt}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{z}\,\hat{z} \tag{45}$$

מתקיים

$$\frac{d}{dt}\,\hat{\rho}(\varphi) = \frac{d}{dt}\,(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}) = (-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y})\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\hat{\varphi} \tag{46}$$

לכן

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} + \dot{z}\,\hat{z} \tag{47}$$

מכפלה סקלרית

המכפלה הסקלרית בקואורדינטות עקומות אורתוגונליות נתונה על ידי

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\tilde{u}_i \hat{e}_i) \cdot (\tilde{v}_j \hat{e}_j) = \tilde{u}_i \tilde{v}_j \delta_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{v}_i \tag{48}$$

כמו בקואורדינטות הקרטזיות.

דוגמה: נתונים השדות הווקטוריים (שכבר הכרנו בדוגמאות הקודמות)

$$\vec{v}(\vec{r}) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{49}$$

$$\vec{w}(\vec{r}) = \rho\,\hat{\varphi} + z\,\hat{z} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{50}$$

כאשר רשמנו אותם בקואורדינטות גליליות ובקואורדינטות קרטזיות. חישוב המכפלה הסקלרית בקואורדינטות הגליליות נותן

$$\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{w}(\vec{r}) = (\rho, 0, z) \cdot (0, \rho, z) = 0 + 0 + z^2 = z^2 \tag{51}$$

וזוהי אותה התוצאה שמקבלים בקואורדינטות הקרטזיות:

$$\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{w}(\vec{r}) = (x, y, z) \cdot (-y, x, z) = -xy + yx + z^2 = z^2 \tag{52}$$

גרדיאנט

נתחיל מהביטוי לגרדיאנט בקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{\nabla} f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{x}_j \tag{53}$$

ונחשב את ההיטל שלו על וקטור בסיס $\hat{e}_i$ של קואורדינטות עקומות:

$$\vec{\nabla} f \cdot \hat{e}_i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{x}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{1}{h_i} \tag{54}$$

$$= \frac{1}{h_i} \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{55}$$

$$= \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{56}$$

נוכל אם כן לכתוב

$$\vec{\nabla} f = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \, \hat{e}_i \tag{57}$$

לדוגמה, בקואורדינטות גליליות

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \, \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \, \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \, \hat{z} \tag{58}$$

דוגמה: נחשב את הגרדיאנט של הפונקציה

$$f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \tag{59}$$

בקואורדינטות הגליליות מיד נקבל

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \hat{z} = -\frac{\hat{\rho}}{\rho^2} \tag{60}$$

אותו החישוב בקואורדינטות הקרטזיות היה נראה כך:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{z} \tag{61}$$

$$= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, \hat{x} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, \hat{y} \tag{62}$$

$$= -\frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\rho^3} = -\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\frac{\hat{\rho}}{\rho^2} \tag{63}$$

אינטגרל מסלולי

עבור הביטוי לאינטגרל המסלולי נקבל

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) \cdot (h_1 dq_1, h_2 dq_2, h_3 dq_3) \tag{64}$$

כאשר השתמשנו בביטוי (48) עבור המכפלה הסקלרית ובמשוואה (15) עבור $d\vec{r}$.

דוגמה: עבור השדה

$$\vec{w}(\vec{r}) = \rho\,\hat{\varphi} + z\,\hat{z} = -y\,\hat{x} + x\,\hat{y} + z\,\hat{z} \tag{65}$$

שהשתמשנו בו בדוגמאות הקודמות, נחשב את האינטגרל המסלולי לאורך מעגל ברדיוס R סביב הראשית במישור xy. בקואורדינטות גליליות נקבל

$$\oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r} = \oint_C (0, \rho, z) \cdot (d\rho, \rho\, d\varphi, dz) \tag{66}$$

$$= \oint_C (0 + \rho^2 d\varphi + z\, dz) \tag{67}$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{68}$$

$$= 2\pi R^2 \tag{69}$$

כאשר הצבנו $\rho = R$ ו־$dz = 0$. בקואורדינטות קרטזיות נשתמש במסילה

$$x(t) = R\cos t\,, \quad y(t) = R\sin t\,, \quad z(t) = 0\,, \quad 0 \leq t < 2\pi \tag{70}$$

וגם נקבל

$$\oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{w}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \tag{71}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)\, dt \tag{72}$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 dt \tag{73}$$

$$= 2\pi R^2 \tag{74}$$

רוטור

נשתמש בקשר שהוכחנו כשדיברנו על משפט סטוקס:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{75}$$

כאשר C היא המסילה התוחמת את השטח A שכיווניותה תואמת את כיוונו של וקטור הנורמל $\hat{n}$ לפי כלל יד ימין. כדי לקבל את הרכיב השלישי (לדוגמה) של הרוטור בקואורדינטות

עקומות, נסתכל על שטח מלבני קטן המאונך לווקטור הבסיס $\hat{e}_3$, שצלעותיו מקבילות ל־$\hat{e}_1$ ו־$\hat{e}_2$. האינטגרל המסלולי יהיה

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{q_1}^{q_1+\Delta q_1} dq_1' \left(h_1\tilde{F}_1\Big|_{q_2} - h_1\tilde{F}_1\Big|_{q_2+\Delta q_2} \right) + \int_{q_2}^{q_2+\Delta q_2} dq_2' \left(h_2\tilde{F}_2\Big|_{q_1+\Delta q_1} - h_2\tilde{F}_2\Big|_{q_1} \right) \tag{76}$$

$$\simeq -\Delta q_2 \int_{q_1}^{q_1+\Delta q_1} dq_1' \, \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1\tilde{F}_1\right) + \Delta q_1 \int_{q_2}^{q_2+\Delta q_2} dq_2' \, \frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2\tilde{F}_2\right) \tag{77}$$

$$\simeq -\Delta q_2 \Delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1\tilde{F}_1\right) + \Delta q_1 \Delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2\tilde{F}_2\right) \tag{78}$$

נחלק אותו בשטח המלבן, $A = h_1\Delta q_1 h_2 \Delta q_2$, ונקבל

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{e}_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2\tilde{F}_2\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1\tilde{F}_1\right)\right] \tag{79}$$

פיתוח דומה תקף עבור הרכיבים הראשון והשני של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ובסך הכל נקבל

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1\tilde{F}_1 & h_2\tilde{F}_2 & h_3\tilde{F}_3 \end{vmatrix} \tag{80}$$

אינטגרל נפחי

ניזכר ממשוואה (15) ש־

$$d\vec{r} = (h_1 dq_1,\, h_2 dq_2,\, h_3 dq_3) \tag{81}$$

ושאנחנו מדברים על קואורדינטות אורתוגונליות. אז

$$\iiint_V f(\vec{r})\, dV = \iiint_V f(\vec{r})\, h_1h_2h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{82}$$

דוגמה: בקואורדינטות גליליות $h_2=\rho$, $h_1=h_3=1$ ולכן

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \tag{83}$$

דיברגנץ

נשתמש בקשר שהוכחנו כשדיברנו על משפט גאוס,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \tag{84}$$

כאשר S הוא המשטח התוחם את הנפח V. ניקח את הנפח להיות תיבה קטנה שצלעותיה מקבילות לווקטורי הבסיס העקום:

$$V=h_1h_2h_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3 \tag{85}$$

השטף היוצא מהתיבה הוא

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint dq_2dq_3\left[h_2h_3\tilde{F}_1\Big|_{q_1+\Delta q_1}-h_2h_3\tilde{F}_1\Big|_{q_1}\right]+\ldots+\ldots \tag{86}$$

$$\simeq \Delta q_1\iint dq_2dq_3\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3\tilde{F}_1)+\ldots+\ldots \tag{87}$$

$$\simeq \Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3\tilde{F}_1)+\ldots+\ldots \tag{88}$$

$$=\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3\tilde{F}_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1\tilde{F}_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2\tilde{F}_3)\right] \tag{89}$$

לכן

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3\tilde{F}_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1\tilde{F}_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2\tilde{F}_3)\right] \tag{90}$$

דוגמה: בקואורדינטות גליליות

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(\rho F_z)\right] \tag{91}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}F_z \tag{92}$$

נדגים עבור השדה

$$\vec{v}(\vec{r})=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}=\rho\hat{\rho}+0\hat{\varphi}+z\hat{z} \tag{93}$$

בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=1+1+1=3 \tag{94}$$

ובקואורדינטות גליליות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}0+\frac{\partial}{\partial z}z \tag{95}$$

$$=2+0+1=3 \tag{96}$$

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור בקואורדינטות כדוריות וגליליות

על ידי הצבת גורמי הסקלה ממשוואות (22) ו־(26) במשוואות (57), (80) ו־(90) נקבל עבור **הקואורדינטות הכדוריות**

$$\vec{\nabla} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \tag{97}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\phi) = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right]\hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}\end{aligned} \tag{99}$$

ועבור **הקואורדינטות הגליליות**

$$\vec{\nabla} f(r,\phi,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{z} \tag{100}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\phi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\phi,z) = {} & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}\end{aligned} \tag{102}$$