תכונות של עקומות

מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה, סתיו תשפ"ג, מרצה: ד"ר אבגני כץ*

תיאור עקומות באמצעות מסילות

כפי שכבר למדנו בפרקים הקודמים, ניתן לתאר עקומה במרחב על ידי מסילה עם פרמטר t

$$\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) \qquad t_i \leq t \leq t_f \tag{1}$$

הגדרנו גם את ה"מהירות"

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t),\, \dot{y}(t),\, \dot{z}(t)) \tag{2}$$

שאת גודלה סימנו $v(t) = |\vec{v}(t)|$. באופן דומה, ה"תאוצה" מוגדרת כ־

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t),\, \ddot{y}(t),\, \ddot{z}(t)) \tag{3}$$

נזכיר שבאופן כללי הפרמטר t איננו זמן, ובדרך כלל אין לו בכלל משמעות פיזיקלית כלשהי, אלא הוא רק כלי לתיאור העקומה. בהתאם לכך, כשאנחנו מדברים כאן על מהירות, תאוצה וכדומה, אין הכוונה בהכרח לתיאור של תנועה פיזיקלית של גוף כלשהו, אלא מדובר בסך הכל באנלוגיה שימושית. הזכרנו גם את האפשרות להשתמש במרחק לאורך העקומה, s, בתור פרמטר, ובמקרה כזה $v(s) = |d\vec{r}/ds| = 1$.

הבסיס הנע: המשיק, הנורמל והבינורמל

נגדיר את ה**משיק** (**tangent**) לעקומה

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \tag{4}$$

ו**הנורמל** (**normal**) לעקומה

$$\hat{N}(t) = \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{\left|\dot{\hat{T}}(t)\right|} \tag{5}$$

נשים לב שהמשיק והנורמל מאונכים זה לזה כיוון שווקטור הנגזרת של וקטור יחידה חייב להיות מאונך לווקטור היחידה כדי שהגודל שלו לא ישתנה. ניתן לראות זאת כך:

$$\hat{T}(t) \cdot \dot{\hat{T}}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}1 = 0 \tag{6}$$

*מבוסס במידה רבה על חומר שהוכן בזמנו ע"י פרופ' איתן גרוספלד.

נגדיר את ה**בינורמל (binormal)** על ידי

$$\hat{B}(t)=\hat{T}(t)\times\hat{N}(t) \tag{7}$$

המשיק והנורמל פורשים את **המישור הנושק לעקומה**. הנורמל והבינורמל פורשים את **המישור המאונך לעקומה**.

נשים לב ששלושת וקטורי היחידה $\hat{T}(t)$, $\hat{N}(t)$, $\hat{B}(t)$ בנקודה נתונה על העקומה הם תכונות של העקומה – הם לא תלויים בבחירת המסילה שמתארת את העקומה.

כל פונקציה עם פלט וקטורי המוגדרת על העקומה יכולה להירשם באמצעות וקטורי הבסיס הסטנדרטיים:

$$\vec{m}(t)=m_x(t)\hat{x}+m_y(t)\hat{y}+m_z(t)\hat{z} \tag{8}$$

או באמצעות וקטורי **הבסיס הנע** (הנקרא גם בסיס פרנה־סרה, **Frenet–Serret basis**):

$$\vec{m}(t)=m_T(t)\hat{T}(t)+m_N(t)\hat{N}(t)+m_B(t)\hat{B}(t) \tag{9}$$

נשתמש בכך כדי לרשום את וקטור התאוצה בצורה פשוטה.

משפט: עבור כל מסילה $\vec{r}(t)$, התאוצה חייבת להיות מהצורה

$$\vec{a}(t)=a_T(t)\hat{T}(t)+a_N(t)\hat{N}(t) \tag{10}$$

עם $a_N(t)\geq 0$, וללא רכיב בכיוון הבינורמל.

הוכחה: מהגדרת המשיק נקבל

$$\vec{v}(t)=v(t)\hat{T}(t) \tag{11}$$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$$\vec{a}(t)=\dot{v}(t)\hat{T}(t)+v(t)\dot{\hat{T}}(t) \tag{12}$$

כעת, נקבל מהגדרת הנורמל

$$\vec{a}(t)=\dot{v}(t)\hat{T}(t)+v(t)\left|\dot{\hat{T}}(t)\right|\hat{N}(t) \tag{13}$$

כלומר $a_T(t)=\dot{v}(t)$, $a_N(t)=v(t)\left|\dot{\hat{T}}(t)\right|\geq 0$, ואין רכיב בכיוון הבינורמל.

מהמשפט הנ"ל נובע שניתן לרשום את הבינורמל גם באופן הבא:

$$\hat{B}(t)=\frac{\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|} \tag{14}$$

ביטוי זה שקול להגדרה המקורית, $\hat{B}(t)=\hat{T}(t)\times\hat{N}(t)$ מכיוון ש־$\vec{v}(t)$ מקביל ל־$\hat{T}(t)$, ו־$\vec{a}(t)$ נתון על ידי משוואה (10).

מסילות על מעגל והשוואה לקינמטיקה

מסילה כללית העוברת על מעגל סביב הראשית במישור xy נתונה על ידי

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos\theta(t),\, \sin\theta(t),\, 0\right) \tag{15}$$

כאשר R הוא קבוע. נגזור ונקבל את המהירות

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\,\dot{\theta}(t)\left(-\sin\theta(t),\, \cos\theta(t),\, 0\right) \tag{16}$$

$$v(t) = R\left|\dot{\theta}(t)\right| \equiv R\omega(t) \tag{17}$$

כאשר $\omega(t) \equiv \dot{\theta}(t)$ אנלוגי למהירות הזוויתית המופיעה בתיאור תנועה מעגלית של חלקיק. למען הפשטות, אנחנו מניחים שהמהירות הזוויתית חיובית. נמצא את המשיק, הנורמל והבינורמל:

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \left(-\sin\theta(t),\, \cos\theta(t),\, 0\right) \tag{18}$$

$$\hat{N}(t) = \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{\left|\dot{\hat{T}}(t)\right|} = \left(-\cos\theta(t),\, -\sin\theta(t),\, 0\right) \tag{19}$$

$$\hat{B}(t) = \hat{T}(t)\times\hat{N}(t) = (0,\, 0,\, 1) \tag{20}$$

לפי משוואה (13), התאוצה בכיוון הנורמל נתונה על ידי

$$a_N(t) = v(t)\left|\dot{\hat{T}}(t)\right| = \omega^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \tag{21}$$

היא אנלוגית לתאוצה הצנטריפטלית בתנועה מעגלית של חלקיק (מכיוון שהנורמל מכוון אל מרכז המעגל). התאוצה בכיוון המשיק היא קצב שינוי גודל המהירות ואנלוגית לתאוצה המשיקית:

$$a_T(t) = \dot{v}(t) = R\dot{\omega}(t) \tag{22}$$

תכונות של עקומות: עקמומיות ופיתול

עבור עקומה כללית הנמצאת במישור, נגדיר את **המעגל הנושק לעקומה** בנקודה $\vec{r}(t)$ כמעגל המקרב באופן הטוב ביותר את צורת העקומה בסביבת הנקודה. נגדיר את **רדיוס העקמומיות** $\rho(t)$ של העקומה כרדיוס של אותו מעגל. ה**עקמומיות** מוגדרת כ־

$$\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)} \tag{23}$$

הגדרה כללית יותר של העקמומיות (התקפה גם אם העקומה אינה נמצאת במישור) היא

$$\kappa(t) = \frac{\left|\dot{\hat{T}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} \tag{24}$$

כלומר קצב שינוי המשיק מחולק במהירות. ברור שקצב שינוי המשיק מודד כמה רחוקה העקומה מלהיות ישרה, ולכן קשור לעקמומיות. מטרת החלוקה במהירות היא שהתלות בפרמטריזציה תצטמצם. כתוצאה מכך, עקמומיות היא תכונה של העקומה, ואיננה תלויה בבחירת המסילה. ניתן להבין זאת אם נשים לב שווקטור היחידה $\hat{T}$ בנקודה נתונה $\vec{r}$ על העקומה, כמו גם $\vec{r}$ עצמו, הם גדלים גיאומטריים שאינם תלויים באופן שבו מגדירים את המסילה שתתאר את העקומה, ולכן גם היחס בין נגזרותיהם הוא גודל גיאומטרי.

ראינו שעבור מסילה על מעגל ברדיוס R מתקיים

$$\left|\dot{\hat{T}}(t)\right| = \omega(t) \tag{25}$$

$$\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = R\omega(t) \tag{26}$$

כך שאנחנו אכן מקבלים

$$\kappa(t) = \frac{1}{R} \tag{27}$$

אנחנו גם רואים בצורה מפורשת שהתלות בבחירת $\theta(t)$ מתבטלת.

נשים לב שעבור מסילה כללית מתקיים הקשר הבא:

$$a_N(t) = v(t)\left|\dot{\hat{T}}(t)\right| = v^2(t)\kappa(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \tag{28}$$

לכן נוכל לומר שהתאוצה בכיוון הנורמל היא התאוצה הצנטריפטלית הרגעית עבור תנועה על מעגל ברדיוס $\rho(t)$ במהירות $v(t)$.

בעוד שהעקמומיות $\kappa(t)$ מודדת כמה רחוקה העקומה מלהיות ישרה (כלומר, להיות לאורך קו ישר), **הפיתול** $\tau(t)$ מודד כמה רחוקה העקומה מלהיות מישורית (כלומר, מלהיות במישור יחיד). הערך המוחלט של הפיתול מוגדר על ידי

$$|\tau(t)| = \frac{\left|\dot{\hat{B}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} \tag{29}$$

הסימן של הפיתול $\tau(t)$ מוגדר להיות חיובי עבור סליל ימני ושלילי עבור סליל שמאלי. בהמשך, במשוואה (57), נכיר הגדרה חלופית של הפיתול שאוטומטית כוללת את הסימן. נשים לב שכמו העקמומיות, גם הפיתול הוא תכונה של העקומה, ללא תלות בבחירת המסילה.

דוגמה: שני סלילים – סליל ימני $\vec{r}_R(t)$ וסליל שמאלי $\vec{r}_L(t)$:

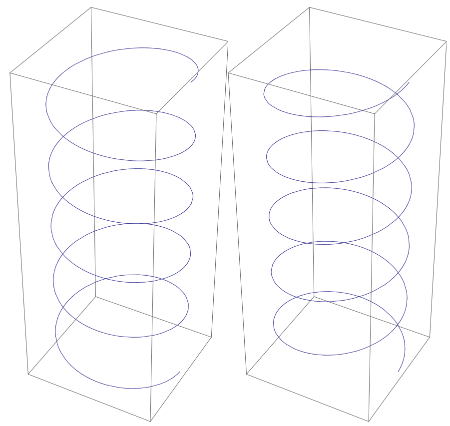
$$\vec{r}_R(t) = (a\cos t, a\sin t, ht) \tag{30}$$

$$\vec{r}_L(t) = (a\cos t, -a\sin t, ht) \tag{31}$$

כאשר $a, h > 0$ הם קבועים. המהירויות הן

$$\vec{v}_R(t) = (-a\sin t, a\cos t, h) \tag{32}$$

$$\vec{v}_L(t) = (-a\sin t, -a\cos t, h) \tag{33}$$



איור 1: סליל שמאלי (שמאל) וימני (ימין). כיוון ההתקדמות של t הוא כלפי מעלה.

וגודלן $v_L(t) = v_R(t) = \sqrt{a^2+h^2}$. המשיק נתון על ידי

$$\hat{T}_{R,L}(t) = \frac{\vec{v}_{R,L}(t)}{v_{R,L}(t)} = \frac{(-a\sin t, \pm a\cos t, h)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{34}$$

$$\dot{\hat{T}}_{R,L}(t) = \frac{(-a\cos t, \mp a\sin t, 0)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{35}$$

מכאן שהעקמומיות היא

$$\kappa_{R,L}(t) = \frac{\left|\dot{\hat{T}}_{R,L}(t)\right|}{v_{R,L}(t)} = \frac{a}{a^2+h^2} \tag{36}$$

כצפוי, עבור המקרה $h=0$ שבו העקומה היא מעגל, העקמומיות היא אחד חלקי רדיוס המעגל a. לעומת זאת, בגבול $h \gg a$, בו העקומה מתקדמת במקביל לציר z הרבה יותר מהר מקצב הסיבוב שלה במישור xy, העקמומיות שואפת לאפס.

כדי לקבל את הפיתול נחשב את התאוצות

$$\vec{a}_R(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \tag{37}$$

$$\vec{a}_L(t) = (-a\cos t, a\sin t, 0) \tag{38}$$

ואת המכפלות הווקטוריות של המהירות בתאוצה

$$\vec{v}_R(t) \times \vec{a}_R(t) = (ha\sin t, -ha\cos t, a^2) \tag{39}$$

$$\vec{v}_L(t) \times \vec{a}_L(t) = (-ha\sin t, -ha\cos t, a^2) \tag{40}$$

$$|\vec{v}_R(t) \times \vec{a}_R(t)|^2 = |\vec{v}_L(t) \times \vec{a}_L(t)|^2 = a^2\left(h^2+a^2\right) \tag{41}$$

הבינורמל נתון על ידי

$$\hat{B}_{R,L}(t) = \frac{\vec{v}_{R,L}(t) \times \vec{a}_{R,L}(t)}{|\vec{v}_{R,L}(t) \times \vec{a}_{R,L}(t)|} = \frac{(\pm h\sin t, -h\cos t, a)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{42}$$

$$\dot{\hat{B}}_{R,L}(t)=\frac{(\pm h\cos t,h\sin t,0)}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{43}$$

מכאן שהפיתול הוא

$$\tau_{R,L}(t)=\pm\frac{\left|\dot{\hat{B}}_{R,L}(t)\right|}{v_{R,L}(t)}=\pm\frac{h}{a^2+h^2} \tag{44}$$

כצפוי, הפיתול מתאפס עבור $h=0$ כי אז העקומה היא מישורית.

משוואות פרנה־סרה (Frenet–Serret formulas)

משפט: עבור עקומה במרחב מתקיימות **משוואות פרנה־סרה**:

$$\text{FS I:}\qquad \frac{d}{dt}\hat{T}(t)=v(t)\kappa(t)\hat{N}(t) \tag{45}$$

$$\text{FS II:}\qquad \frac{d}{dt}\hat{N}(t)=v(t)\left[\tau(t)\hat{B}(t)-\kappa(t)\hat{T}(t)\right] \tag{46}$$

$$\text{FS III:}\qquad \frac{d}{dt}\hat{B}(t)=-v(t)\tau(t)\hat{N}(t) \tag{47}$$

צורה פשוטה יותר מתקבלת כאשר משתמשים בפרמטר האורך s, כיוון שהמהירות אינה מופיעה כי $v(s)=1$:

$$\frac{d}{ds}\hat{T}(s)=\kappa(s)\hat{N}(s) \tag{48}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{N}(s)=\tau(s)\hat{B}(s)-\kappa(s)\hat{T}(s) \tag{49}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{B}(s)=-\tau(s)\hat{N}(s) \tag{50}$$

הוכחה:

<u>משוואת פרנה־סרה הראשונה</u> מתקבלת ישירות מהגדרת הנורמל במשוואה (5) והגדרת העקמומיות במשוואה (24).

<u>משוואת פרנה־סרה השלישית</u>: נגזור את הבינורמל לפי t ונקבל:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{B}(t)&=\frac{d}{dt}\left[\hat{T}(t)\times\hat{N}(t)\right] &(51)\\ &=\frac{d}{dt}\hat{T}(t)\times\hat{N}(t)+\hat{T}(t)\times\frac{d}{dt}\hat{N}(t) &(52)\\ &=\underbrace{v(t)\kappa(t)\hat{N}(t)\times\hat{N}(t)}_{0}+\hat{T}(t)\times\frac{d}{dt}\hat{N}(t) &(53)\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו במשוואה הראשונה. מכאן ש־

$$\frac{d}{dt}\hat{B}(t)\perp\hat{T}(t) \tag{54}$$

בנוסף, מכיוון ש־$\hat{B}(t)$ חייב להישאר וקטור יחידה, חייב להתקיים

$$\frac{d}{dt}\hat{B}(t) \perp \hat{B}(t) \tag{55}$$

בדומה למשוואה (6). לכן ניתן להסיק ש־

$$\frac{d}{dt}\hat{B}(t) \parallel \hat{N}(t) \tag{56}$$

אנחנו יכולים להגדיר את המקדם להיות פרופורציונלי לפיתול $\tau(t)$

$$\frac{d}{dt}\hat{B}(t) = -v(t)\tau(t)\hat{N}(t) \tag{57}$$

במקום הגדרת הפיתול במשוואה (29) ובהסכמה איתה.

משוואת פרנה־סרה השנייה: נרשום את הנורמל כ־$\hat{N}(t) = \hat{B}(t) \times \hat{T}(t)$, נגזור, ונשתמש בשתי משוואות הפרנה־סרה שכבר הוכחנו לעיל:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{N}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\hat{B}(t) \times \hat{T}(t)\right] && (58)\\
&= \frac{d}{dt}\hat{B}(t) \times \hat{T}(t) + \hat{B}(t) \times \frac{d}{dt}\hat{T}(t) && (59)\\
&= -v(t)\tau(t)\hat{N}(t) \times \hat{T}(t) + v(t)\kappa(t)\hat{B}(t) \times \hat{N}(t) && (60)\\
&= v(t)\left[\tau(t)\hat{B}(t) - \kappa(t)\hat{T}(t)\right] && (61)
\end{aligned}$$

זה מסיים את ההוכחה.