

מבחן במבוא לכבידה

משך המבחן שלוש שעות בלבד. יש לענות על כל השאלות.
מספר הנקודות המוענק עבור תשובה נכונה מצויין בסוגריים ליד כל סעיף.

בהצלחה!

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. מצורפים דפי נוסחאות.

1. השאלה עוסקת בגאומטריה של כבידה ניוטונית. נתון אלמנט האורך $ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)d\vec{x}^2$.

(10) א. כתבו את הביטוי לפעולה של גוף בוחן הנע במרחב-זמן הני"ל $\tau_{AB} = \int_A^B d\tau$, פתחו אותו לסדר מוביל בגבול הניוטוני

$$L(\vec{x}, \vec{V}) = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 - \Phi \right) + \dots$$

(10) ב. הראו כי משוואת התנועה הנגזרת מהלגרנגיאן של סעיף א' היא $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi$.

(5) ג. מהו צריך להיות הקשר בין Φ וצפיפות המסה $\mu(x)$ כך שהגיאומטריה אכן תתאר כבידה ניוטונית?

2. השאלה עוסקת בלוויין סינכרוני הנע בגיאומטריה שורצשילד. צופה ראשון נמצא על כוכב ברדיוס R שמסתו M.

הכוכב ניח. צופה שני נמצא על לוויין הסובב את הכוכב במסלול מעגלי יציב ברדיוס r.

(10) א. חשבו את התנע הזוויתי של הלוויין.

(10) ב. חשבו את $d\tau^2$ עבור הצופה הנמצא על הלוויין המסתובב.

(10) ג. חשבו את $d\tau^2$ עבור הצופה הנמצא על הכוכב.

(10) ד. מה צריך להיות הרדיוס r כדי שהשעונים של שני הצופים יהיו מסונכרנים?

3. השאלה עוסקת במסלולי גופים בגיאומטריה של חורים שחורים קיצונים (אקסטרמליים). כאשר כוכב טעון

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

(10) א. חשבו את הפוטנציאל האפקטיבי של גוף חומרי הנע מחוץ לכוכב הני"ל.

(10) ב. כמה מסלולים מעגליים יציבים וכמה מסלולים מעגליים לא יציבים יש לגוף?

(10) ג. עבור המסלול המעגלי היציב החיצוני, חשבו את זמן המחזור העצמי ואת זמן המחזור שימדוד צופה באינסוף.

בטאו את תשובתכם באמצעות רדיוס המסלול.

(10) ד. האם יש מסלול מעגלי יציב כאשר מסת הכוכב היא מסת השמש ורדיוס המסלול המעגלי הוא המרחק בין כדור

הארץ לשמש? אם כן, חשבו עבור מקרה זה את זמני המחזור מסעיף ג' בשניות.

(10) ה. מהם פרמטרי PPN (γ -ו- β) בגיאומטריה של הכוכב הני"ל? לתזכורת

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + 2(\gamma - \beta)\left(\frac{GM}{r}\right)^2 + \dots\right) dt^2 + \left(1 + 2\gamma \frac{GM}{r} + \dots\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

להבחין שהגאומטריה הני"ל שונה מגיאומטריה שורצשילד?