

## מבחן במבוא לכבידה מועד ב'

משך המבחן שלוש שעות בלבד. יש לענות על כל השאלות.  
מספר הנקודות המוענק עבור תשובה נכונה מצויין בסוגריים ליד כל סעיף.

**בהצלחה!**

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. מצורפים דפי נוסחאות.

### 1. נגזרת קווריאנטית.

(15) א. מתוך הדרישה שגם  $\nabla_\mu V^\nu$  וגם  $\nabla_\mu V_\nu$  יהיו טנזורים לכל וקטור  $V$  ומהנוסחה  $V_\nu = g_{\mu\nu} V^\mu$ , הראו שהנגזרת הקווריאנטית חייבת לקיים  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ .

(10) ב. הניחו שהנגזרת הקווריאנטית היא מהצורה  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\nu}$  אך אל תניחו שום דבר על הצורה של  $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma$ . קבלו את הנוסחה עבור סמלי קריסטופל  $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma$  מהדרישה ש-  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ . הדרכה: רשמו את הנוסחה  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$  בפרמוטציות שונות של האינדקסים, כלומר  $\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = 0$  ו-  $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$  וסכמו בצורה הנכונה בכדי לבודד את סמלי קריסטופל.

### 2. השוואה בין הפקת אנרגית בהיתוך גרעיני ובחור שחור.

(5) א. חשבו את החלק היחסי של אנרגית המנוחה המשתחרר בהיתוך מימן להליום  $4 \text{ } ^1\text{H} \rightarrow 4 \text{ He}$  נתון:  $m_{\text{He}} \sim 4.0015 \text{ AMU}$ ,  $m_{\text{H}} \sim 1.0073 \text{ AMU}$

(15) ב. הראו כי החלק היחסי של אנרגית המנוחה המשתחרר כאשר גוף הנמצא באינסוף עובר למסלול מעגלי יציב

$$\frac{E_{\text{משחררת}}}{E_{\text{מנוחה}}} = 1 - \frac{1 - \frac{2M}{R}}{\sqrt{1 - \frac{6M}{2R}}}$$

ברדיוס  $R$  בגאומטריית שוורצשילד של חור שחור במסה  $M$  נתון עי"י

(15) ג. הראו כי עבור המסלול המעגלי היציב הקטן ביותר הרדיוס הוא  $R = 6M$

(5) ד. חשבו את היחס מסעיף ב' עבור המסלול המעגלי היציב הקטן ביותר והשוו לתוצאה של סעיף א'

התוצאה מסבירה מדוע חורים שחורים הם מנועים יעילים.

### 3. אופק האירועים.

גוף שהתחיל במנוחה באינסוף, נופל לתוך חור-שחור במסה  $M$ .

(10) א. חשבו את  $r(\tau)$ , כאשר  $\tau$  הוא הזמן העצמי של הגוף הנופל.

(10) ב. חשבו את  $r(t)$ , כאשר  $t$  הוא הזמן הנמדד עי"י צופה נייח באינסוף.

(10) ג. חשבו את ההסחה לאדום, ביחס לצופה באינסוף, כפונקציה של  $r$ .

(10) א. הראו שלמרות שמבחינת צופה באינסוף הזמן שלוקח לגוף להגיע לאופק הוא אינסופי, ההסחה לאדום גדלה כל כך מהר כך שכל מכשיר מדידה בעל רגישות סופית לא יוכל לגלות את הגוף כעבור זמן סופי וקצר (קצר הינו מושג יחסי). נמקו את תשובתכם באמצעות חשבון.