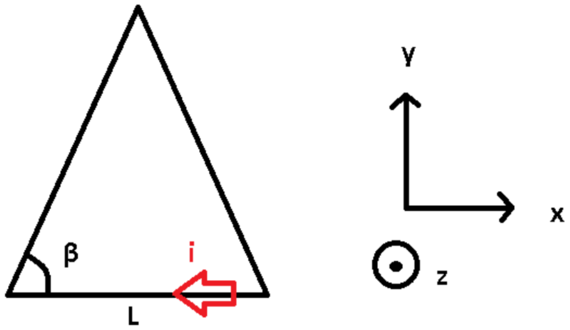
פתרון עבודה 10 - מומנט על לולאת זרם, חוק ביו-סבר וחוק אמפר

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה



1. עבור שטח המשולש, נסמן את הגובה ב-h כך שנקבל:

$$h = \frac{L}{2} \cdot \tan\beta \Rightarrow A = \frac{h \cdot L}{2} = \boxed{\frac{L^2}{4} \tan\beta}$$

2. עבור $\vec{B} = B_z \hat{z}$, מומנט הכוח יחושב לפי הנוסחה שראינו בתרגול 10:

$$\vec{\tau}_1 = i\left(A\hat{n} \times \vec{B}\right) = \boxed{0}$$

וזה שווה אפס מפני שכיוון הנורמל של המשולש הוא לתוך הדף (בכיוון $-\hat{z}$ לפי חוק יד ימין) והמכפלה הוקטורית תחזיר:

$$-\hat{z} \times \hat{z} = 0$$

3. עבור $\vec{B} = B_x \hat{x}$ נקבל:

$$\vec{\tau}_2 = i\left(A\hat{n} \times \vec{B}\right) = -iAB_x\hat{y} = \boxed{-iB_x \frac{L^2}{4} \tan\beta\hat{y}}$$

כאשר השתמשנו במכפלה הוקטורית:

$$-\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{y}$$

או בחוק יד ימין.

4. עבור שדה מגנטי $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ נתון שגודל המומנט הוא:

$$|\vec{\tau}_3| = \frac{iL^2 \tan\beta}{8} \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$$

נרצה לכתוב את זה בצורה:

$$|\vec{\tau}| = iA\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

כאשר θ היא הזווית בין השדה המגנטי לבין הנורמל למשטח המשלוש. נזהה כי:

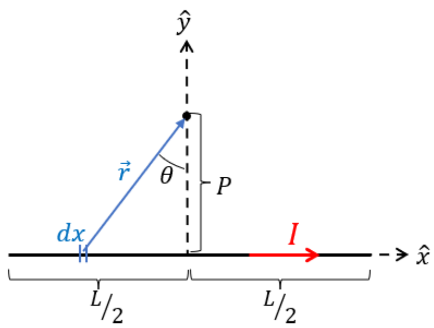
$$A = \frac{L^2}{4}\tan\beta\,;\ \left|\vec{B}\right| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \boxed{\frac{\pi}{6}\,[\text{rad}] = 30^{\text{o}}}$$

2 שאלה 7300

נחלק את התיל לחתיכות קטנות באורך $\mathrm{d}x$ ונסמן את הוקטור מהן אל הנקודה P ב-$\vec{r}$, כך שנוצרת הזווית θ המקיימת:

$$\cos\theta = \frac{P}{\sqrt{x^2 + P^2}}$$

כמופיע באיור:



כעת נוכל לחשב את השדה המגנטי לפי חוק ביו-סבר:

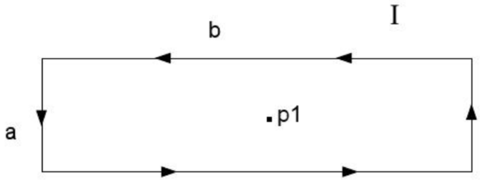
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}\vec{x}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2+P^2}\cdot\cos\theta\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{P\mathrm{d}x}{\left(x^2+P^2\right)^{3/2}}$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int_{-L/2}^{L/2}\frac{P}{\left(x^2+P^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x\cdot\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left[\frac{x}{P\sqrt{x^2+P^2}}\right]_{-L/2}^{L/2}\hat{z}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi P}\cdot\frac{L}{\sqrt{\left(L/2\right)^2+P^2}}\hat{z} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi P}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+4P^2}}\hat{z}}$$

ובגבול בו התיל הוא אינסופי $(L\to\infty)$ נקבל:

$$\vec{B}_\infty = \lim_{L\to\infty}\frac{\mu_0 I}{2\pi P}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+4P^2}}\hat{z} \overset{\{L\gg P\}}{\simeq} \frac{\mu_0 I}{2\pi P}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2}}\hat{z} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi P}\hat{z}}$$

כאשר השתמשנו בקירוב בזה שמרחק הנקודה P זניח ביחס לאורך של התיל וקיבלנו את הפתרון של שדה מגנטי מתיל אינסופי.

3 שאלה 7310



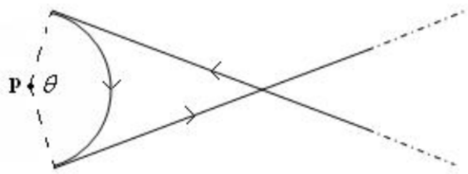
בעצם הבעיה שלנו מורכבת מארבעה תיילים סופיים במרחקים ידועים. בעזרת כלל יד ימין אנחנו יודעים שהשדה במרכז המלבן אשר נגרם מכל אחת מהצלעות מצביע כלפינו (החוצה מהדף או $\hat{z}$). נשתמש בתוצאה שקיבלנו בתרגיל 2:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi P} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4P^2}} \hat{z}$$

ונשתמש בסופרפוזיציה המורכבת משני תיילים עם אורך a ומרחק $b/2$ ושני תיילים עם אורך b ומרחק $a/2$ לקבל:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= 2 \cdot \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot b/2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\left(b/2\right)^2}} \hat{z} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot a/2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4\left(a/2\right)^2}} \hat{z} \right) \\ &= \boxed{\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \hat{z}}\end{aligned}$$

4 שאלה 7309



ראשית נחשב את השדה המגנטי הנוצר מתיל חצי אינסופי כללי (בצורה שקולה לחישוב עם ביו-סבר משאלה 2, כאשר נחליף את המרחק P ברדיוס R):

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{R}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}x \cdot \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left[\frac{x}{R\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_0^\infty \hat{z} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{z}$$

התיל השני ייתן תרומה זהה (שימו לב לכיוון הזרם ולחוק יד ימין):

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{z}$$

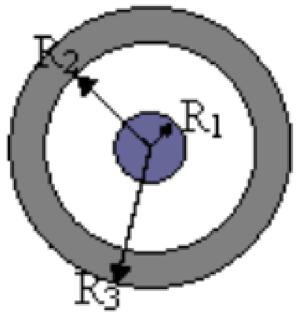
כעת נשאר לנו לחשב את התרומה מהקשת, עבורה נסמן $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$ ולפי חוק יד ימין מקבלים שכיוון השדה הוא $-\hat{z}$ (לתוך הדף), כך שנקבל:

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int\limits_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{R} \left(-\hat{z}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \theta \hat{z}$$

השדה הכולל יתקבל לפי סופרפוזיציה:

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\theta\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 2\,[\text{rad}]}$$

5 שאלה 7403



נשתמש בחוק אמפר בסימטריה הגלילית, כך שלכל תחום נייצר לולאה באורך $2\pi r$ עם מרכז המתלכד עם מרכז הכבל:

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I_{\text{in}} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{I_{\text{in}}}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

אך צפיפות הזרם אינה קבועה ונוכל לכתוב אותה באופן הבא:

$$j(r) = \begin{cases} -\frac{I}{\pi {R_1}^2} & , r < R_1 \\ 0 & , R_1 < r < R_2 \\ \frac{I}{\pi({R_3}^2 - {R_2}^2)} & , R_2 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases}$$

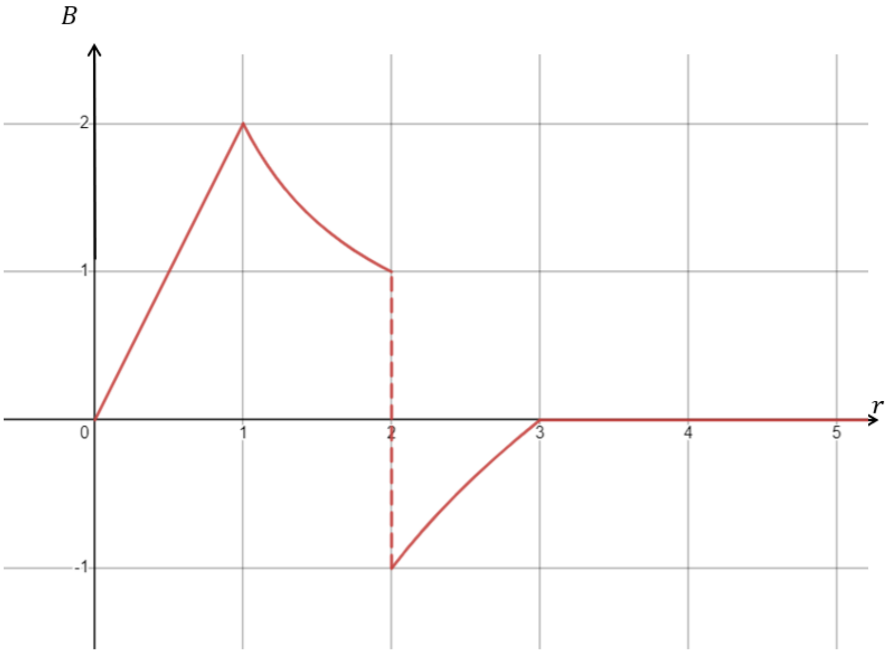
כאשר השתמשנו בעובדה שהזרם מתפלג אחיד בתוך השכבה הפנימית (שטח $\pi {R_1}^2$) והחיצונית (שטח $\pi\left({R_3}^2 - {R_2}^2\right)$). מכאן נקבל את הזרם בתוך כל לולאה לפי:

$$I_{\text{in}} = \pi r^2 \cdot j(r) = \begin{cases} -I\frac{r^2}{{R_1}^2} & , r < R_1 \\ -I & , R_1 < r < R_2 \\ I\frac{\left(r^2 - {R_2}^2\right)}{\left({R_3}^2 - {R_2}^2\right)} - I = I\frac{\left(r^2 - {R_3}^2\right)}{\left({R_3}^2 - {R_2}^2\right)} & , R_2 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases}$$

ולכן השדה המגנטי בכל המרחב יהיה:

$$\boxed{B_\varphi = \begin{cases} -\mu_0 \frac{I}{2\pi}\frac{r}{{R_1}^2} & , r < R_1 \\ -\mu_0 \frac{I}{2\pi r} & , R_1 < r < R_2 \\ \mu_0 \frac{I}{2\pi}\frac{\left(r^2 - {R_3}^2\right)}{r\left({R_3}^2 - {R_2}^2\right)} & , R_2 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases}}$$

מצורף גרף של השדה המגנטי עם ערכים ממוצאים לזרם ולרדיוסים:


B
2
1
0
-1
1
2
3
4
5
r