מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 12

משוואות ליניאריות לא הומוגניות מסדר שני

עבור משוואה לא הומוגנית כדי למצוא פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית המתאימה ונוסיף פתרון פרטי כך שהפתרון יהיה:

$$X\left(t\right)=a_1x_1\left(t\right)+a_1x_2\left(t\right)+x_p\left(t\right)$$

כאשר $x_1\left(t\right)$, $x_2\left(t\right)$ הם שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה ההומוגנית ו- $x_p\left(t\right)$ הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית.
עבור מקרים מסויימים ניתן לנחש את הצורה של הפתרון הפרטי ולמצוא את המקדמים שלו בעזרת הצבה במשוואה.

- עבור אקספוננט $g\left(t\right)=be^{\lambda t}$ ננחש שהפתרון הוא אקספוננט $x_p=ce^{\lambda t}$.
- עבור פונקציה טריגונומטרית $g\left(t\right)=b_1\cos\left(\omega t\right),b_2\sin\left(\omega t\right)$ או סכום שלהם ננחש סכום של פונקציות טריגונומטריות $x_p=c_1\cos\left(\omega t\right)+c_2\sin\left(\omega t\right)$.
- עבור פולינום $g\left(t\right)=b_0+b_1t+\cdots+b_Nt^N$ (חלק מהמקדמים יכולים להיות אפסים) ננחש פולינום מאותו סדר $x_p=c_0+c_1t+\cdots+c_Nt^N$

אם $g\left(t\right)$ הוא סכום או מכפלה של הפונקציות האלו ננחש שהפתרון הפרטי הוא סכום או מכפלה של הפתרונות המתאימים.
יש לשים לב שהשיטה הזו לא עובדת כאשר הפתרון הפרטי שננחש, או אחד החלקים שלו, הוא אחד מהפתרונות של המשוואה ההומוגנית, במקרה כזה נכפיל את הפתרון בt^m כאשר m הוא החזקה הכי קטנה שתיצור לנו פתרון שאף חלק שלו לא מתלכד עם הפתרונות של המשוואה ההומוגונית.

תרגיל 1

פתרו את המשוואה:

$$\ddot{x}+2\dot{x}+4x=5\cos\left(t\right)$$

עם תנאי ההתחלה

1. $x(0)=2, \dot{x}(0)=0$
2. $x(0)=0, \dot{x}(0)=2$

פתרון

נפתור קודם את המשוואה ההומוגנית
נציב $x(t)=e^{rt}$
ונקבל את המשוואה האופיינית:

$$r^2+2r+4=0$$

$$r_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{4-16}}{2}-1\pm i\sqrt{3}$$

$$r_1=-1+i\sqrt{3}, \quad r_2=-1-i\sqrt{3}$$

מעקרון הסופרפוזיציה נקבל את הפתרון הכללי:

$$x(t)=a_1e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

כדי לפתור את המשוואה הלא הומוגנית, מכיוון שהאיבר הלא הומוגני הוא $5\cos(t)$ ננחש פתרון מהצורה

$$x_p(t)=c_1\cos(t)+c_2\sin(t)$$

הנגזרות יהיו

$$\dot{x}_p(t)=-c_1\sin(t)+c_2\cos(t)$$

$$\ddot{x}_p(t)=-c_1\cos(t)-c_2\sin(t)$$

נציב אותו במשוואה שלנו:

$$-c_1\cos(t)-c_2\sin(t)+2\left(-c_1\sin(t)+c_2\cos(t)\right)+4\left(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)\right)=5\cos(t)$$

$$(3c_1+2c_2)\cos(t)+(-2c_1+3c_2)\sin(t)=5\cos(t)$$

על מנת שהפתרון יהיה נכון עבור כל t המקדמים של $\cos(t)$, $\sin(t)$ צריכים להתאפס בנפרד.
נקבל שתי משוואות

$$3c_1 + 2c_2 = 5$$

$$-2c_1 + 3c_2 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{2}{3}c_1$$

נציב במשוואה הראשונה

$$c_1 = \frac{15}{13} \rightarrow c_2 = \frac{10}{13}$$

ומכאן הפתרון הכללי

$$x(t) = a_1 e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right) + a_2 e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{5}{13}\left[3\cos(t) + 2\sin(t)\right]$$

1. נציב את תנאי ההתחלה

$$x(0) = a_1 + \frac{15}{13} = 2 \rightarrow a_1 = \frac{11}{13}$$

$$\dot{x}(t) = -a_1 e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \sqrt{3}a_1 e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right) - a_2 e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$
$$+\sqrt{3}a_2 e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{5}{13}\left[-3\sin(t) + 2\cos(t)\right]$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{11}{13} + \frac{10}{13} + \sqrt{3}a_2 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{1}{13\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x(t) = \frac{11}{13}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{1}{13\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{5}{13}\left[3\cos(t) + 2\sin(t)\right]$$

2. נציב את תנאי ההתחלה

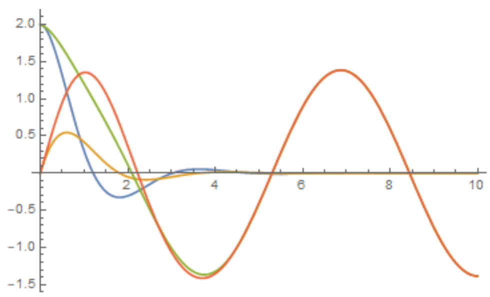
$$x\left(0\right)=a_1+\frac{15}{13}=0\rightarrow a_1=-\frac{15}{13}$$

$$\dot{x}\left(t\right)=-a_1e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\sqrt{3}a_1e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)-a_2e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$
$$+\sqrt{3}a_2e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{5}{13}\left[-3\sin\left(t\right)+2\cos\left(t\right)\right]$$

$$\dot{x}\left(0\right)=\frac{15}{13}+\frac{10}{13}+\sqrt{3}a_2=2\rightarrow a_2=\frac{1}{13\sqrt{3}}$$

וקיבלנו את הפתרון

$$x\left(t\right)=-\frac{15}{13}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{1}{13\sqrt{3}}e^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{5}{13}\left[3\cos\left(t\right)+2\sin\left(t\right)\right]$$



המשוואה הזו מתארת אוסילטור מאולץ כך שהכוח המאלץ משתלט על התנועה וגורם לו לנוע בתדירות של הכוח המאלץ.

קואורדינטות עקומות

כדי לעבור ממערכת קואורדינטות קרטזית למערכת קואורדינטות אחרת נחפש את וקטורי הבסיס החדשים ואת גורמי הסקלה שלהם על ידי הקשר

$$d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)=\sum_i\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}dq_i=\sum_i h_idq_i\hat{e}_i$$

דוגמה

עבור קואורדינטות ספריות $\vec{r}=r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x}+r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y}+r\cos\theta\hat{z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y}+\cos\theta\hat{z}=\hat{r}\left(\theta,\varphi\right)\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} &= r\underbrace{\left(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{x}+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{y}-\sin\theta\hat{z}\right)}_{\hat{\theta}}=r\hat{\theta}\left(\theta,\varphi\right)\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} &= r\sin\theta\underbrace{\left(-\sin\varphi\,\hat{x}+\cos\varphi\,\hat{y}\right)}_{\hat{\varphi}}=r\sin\theta\hat{\varphi}\left(\varphi\right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\varphi=r\sin\theta$$

$$\vec{r}=r\hat{r}$$

תרגיל 1

מיקום של חלקיק במערכת ספרית הינו

$$\vec{r}=\left(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta\right)=r\hat{r}$$

מיצאו את מהירות החלקיק במערכת זו

פתרון

נגזור את המיקום בזמן

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d}{dt}\hat{r}$$

נגזור את וקטור היחידה $\hat{r}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{r}=&\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi\hat{x}-\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}\hat{x}+\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi\hat{y}+\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}\hat{y}-\sin\theta\dot{\theta}\hat{z}\\
=&\dot{\theta}\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{x}+\cos\theta\sin\varphi\hat{y}-\sin\theta\hat{z}\right)+\sin\theta\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}\right)\\
=&\dot{\theta}\hat{\theta}+\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}
\end{aligned}$$

וקיבלנו

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

פרישת ווקטור

על מנת לפרוש ווקטור בקוארדינטות העקומות נפרוש אותו בבסיס החדש על ידי השוויון :

$$\vec{v} = v_i\hat{x}_i = \tilde{v}_i\hat{e}_i$$

כאשר

$$\tilde{v}_i = \vec{v}\cdot\hat{e}_i = \vec{v}\cdot\left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

כאשר $\vec{r}_0$ הוא הנקודה ממנה יוצא הווקטור (בניגוד למצב בקוארדינטות קרטזיות במערכות עקומות יכולה להיות השפעה על המיקום של הוקטור במרחב על רכיבי הווקטור)
על מנת לחשב מכפלה סקלרית בין שני ווקטורים נחשב

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \left(\tilde{v}_i\hat{e}_i\right)\left(\tilde{u}_j\hat{e}_j\right) = \tilde{v}_i\tilde{u}_j\delta_{ij} = \tilde{v}_i\tilde{u}_i$$

כלומר, המכפלה הסקלרית לא מושפעת מבחירת מערכת הקוארדינטות

תרגיל 2

נתון הווקטור

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

העבירו את הווקטור לקוארדינטות פולאריות

1. כאשר הווקטור מתחיל בנקודה $(0,1)$
2. כאשר הווקטור במתחיל בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

פתרון

נחשב את הרכיבים בקואורדינטות פולאריות

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} = \hat{r}\left(\theta\right)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\underbrace{\left(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}\right)}_{\hat{\theta}} = r\,\hat{\theta}\left(\theta\right)$$

$$h_r = 1, h_\theta = r$$

1. בנקודה הראשונה

$$\vec{r}_0 = (0,1) \to r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{v}_r = \vec{v}\cdot\hat{e}_r = \vec{v}\cdot\left.\left(\frac{1}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)\right|_{\vec{r}=(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tilde{v}_\theta = \vec{v}\cdot\hat{e}_\theta = \vec{v}\cdot\left.\left(\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)\right|_{\vec{r}=(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר, בכל כיוון יש רכיב באורך $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{r} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}$$

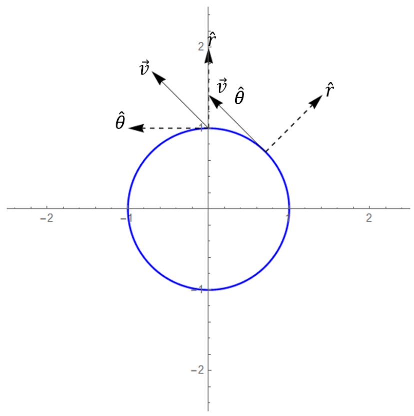
2. בנקודה השניה

$$\vec{r}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tilde{v}_r = \vec{v}\cdot\hat{e}_r = \vec{v}\cdot\left.\left(\frac{1}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)\right|_{\vec{r}=(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$
$$\tilde{v}_\theta = \vec{v}\cdot\hat{e}_\theta = \vec{v}\cdot\left.\left(\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)\right|_{\vec{r}=(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1$$

כלומר, הווקטור הוא רק בכיוון $\hat{\theta}$

$$\vec{v} = \hat{\theta}$$



אופרטורים וקטוריים בקואורדינטות עקומות

חישוב הגרדיאנט בקואורדינטות עקומות

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\vec{\nabla} f}_i =& \vec{\nabla} f \cdot \hat{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{x}_j \cdot \hat{e}_i \\
=& \frac{\partial f}{\partial x_j} \hat{x}_j \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \\
=& \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$

כלומר

$$
\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i
$$

עבור הדיברגנץ והרוטור החישוב מסובך יותר מכיוון שווקטורי הקואורדינטות עצמם תלויים בקואורדינטות ולכן צריך למצוא אותם דרך ההגדרה האינטגרלית שלהם.
נקבל:

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\tilde{F}_1 h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\tilde{F}_2 h_3 h_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\tilde{F}_3 h_1 h_2 \right) \right]
$$

$$
\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \partial_{q_1} & \partial_{q_2} & \partial_{q_3} \\ h_1 \tilde{F}_1 & h_2 \tilde{F}_2 & h_3 \tilde{F}_3 \end{vmatrix}
$$

תרגיל 3

נתון השדה הווקטורי

$$\vec{F}=\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

חשבו את הדיברגנץ של השדה

1. בקואורדינטות קרטזיות
2. בקואורדינטות ספריות

פתרון

1. בקואורדינטות קרטזיות

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-3x^2\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^3}=\frac{x^2+y^2+z^2+a^2-3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

באותו אופן נחשב את שתי הנגזרות האחרות ונקבל

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{3a^2}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

2. בקואורדינטות ספריות

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{r}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{r}$$

לשדה יש רכיב רק בכיוון $\hat{r}$. הדיברגנץ יהיה

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r h_\theta h_\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta h_\varphi h_r\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi h_r h_\theta\right)\right]$$

עבור קואורדינטות ספריות $h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\varphi=r\sin\theta$. נקבל

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=&\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi r\right)\right]\\=&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right)\end{aligned}$$

עבור השדה שלנו נקבל

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^3}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{3r^2\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-3r^4\left(r^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(r^2+a^2\right)^3}\right)=\frac{3a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

תרגיל 4

נתון השדה הווקטורי

$$\vec{A} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(zx, zy, -x^2-y^2\right)$$

חשבו את הרוטור $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

1. בקואורדינטות קרטזיות
2. בקואורדינטות ספריות

פתרון

1. בקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\sqrt{x^2+y^2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{zyx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{zyx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-y, x, 0\right)$$

2. בקואורדינטות ספריות- נכתוב את השדה בקואורדינטות הספריות:

$$\begin{aligned}\vec{A} =& \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(zx, zy, -x^2-y^2\right) \\ =& \frac{1}{2r\sin\theta\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}\left(r\cos\theta r\sin\theta\cos\varphi, r\cos\theta r\sin\theta\sin\varphi, -r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right) \\ =& \frac{r}{2}\left(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\right) = \frac{r}{2}\hat{\theta}\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\vec{A} = \frac{r}{2}\hat{\theta}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\left(\theta\right)}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\left(\theta\right)\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{\varphi}$$

אינטגרלים בקואורדינטות עקומות

עבור האינטגרלים נשתמש בזהות שהראינו

$$d\vec{r}=(dx,dy,dz)=\sum_{i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_{1}}dq_{i}=\sum_{i}h_{i}dq_{i}\hat{e}_{i}$$

כלומר, כאשר משתמשים בגדלים האינטפסימליים של הקואורדינטות העקומות צריך להכפיל אותם בגורמי הסקאלה. מכאן נקבל שהאינטגרל המסלולי יראה מהצורה

$$\int\vec{v}\cdot d\vec{r}=\int\left(\tilde{v}_{1},\tilde{v}_{2},\tilde{v}_{3}\right)\cdot\left(h_{1}dq_{1},h_{2}dq_{2},h_{3}dq_{3}\right)$$

האינטגרל המשטחי, עבור משטח שנמצא על מישורי הקואורדינטות עצמם, למשל $q_{1}=c$

$$\vec{e}_{1}dS=h_{2}dq_{2}\hat{e}_{2}\times h_{3}dq_{3}\hat{e}_{3}=h_{2}h_{3}dq_{2}dq_{3}\hat{e}_{1}$$

ועבור אינטגרל נפחי

$$\iiint f\left(\vec{r}\right)dxdydz=\iiint f\left(\vec{r}\right)h_{1}h_{2}h_{3}dq_{1}dq_{2}dq_{3}$$

שימו לב שגורמי הסקאלה הם בעצם היעקוביאן, כך עבור יחידת נפח

$$h_{i}\hat{e}_{i}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_{i}}$$

$$dV=h_{1}dq_{1}\hat{e}_{1}\cdot\left(h_{2}dq_{2}\hat{e}_{2}\times h_{3}dq_{3}\hat{e}_{3}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_{1}} & \frac{\partial y}{\partial q_{1}} & \frac{\partial z}{\partial q_{1}}\\ \frac{\partial x}{\partial q_{2}} & \frac{\partial y}{\partial q_{2}} & \frac{\partial z}{\partial q_{2}}\\ \frac{\partial x}{\partial q_{3}} & \frac{\partial y}{\partial q_{3}} & \frac{\partial z}{\partial q_{3}}\end{vmatrix}dq_{1}dq_{2}dq_{2}$$