פתרון עבודה 11 - חוק אמפר ופאראדיי

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה

1. על מנת לחשב את צפיפות הזרם נשתמש בחוק אמפר בסימטריה הגלילית עבור לולאה ברדיוס d:

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
$$2\pi d B_0 = \mu_0 J \int_a^d r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$dB_0 = \mu_0 J \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^d$$
$$J = \boxed{\frac{2d}{(d^2-a^2)}\cdot\frac{B_0}{\mu_0}}$$

כאשר בשורה השנייה הוצאנו את צפיפות הזרם מהאינטגרל כי נתון לנו שהיא מתפלגת אחיד.

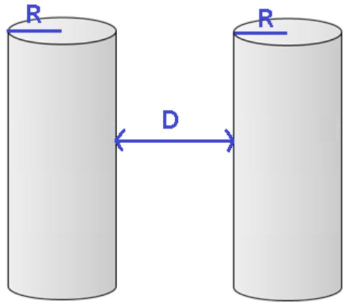
2. את הזרם הכללי נחשב על ידי אינטגרציה של צפיפות הזרם האחידה שחישבנו על שטח כל הכבל:

$$I = \iint \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = J\int_a^b r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{2\pi d\cdot\left(b^2-a^2\right)}{(d^2-a^2)}\cdot\frac{B_0}{\mu_0}}$$

3. את השדה המגנטי מחוץ לכבל $(r > b)$ ניתן לחשב באמצעות חוק אמפר:

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
$$2\pi r B = \mu_0 I$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \boxed{\frac{d\cdot\left(b^2-a^2\right)}{(d^2-a^2)\cdot r}\cdot B_0\hat{\varphi}}$$

2 שאלה



1. על מנת לחשב את השדה המגנטי בין שני הגלילים נשתמש בסופרפוזיציה, כאשר השדה שמייצר כל גליל שקול לשדה של תיל אינסופי עם זרם המחושב לפי:

$$I=\int_0^R j_0\frac{r}{R}\cdot r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{3}R^2j_0$$
$$\Rightarrow \vec{B}\left(r\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}=\frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r}\hat{\varphi}$$

כעת מפני שהזרם בשני הגלילים הוא באותו כיוון, נקבל שהשדות שהם יוצרים בדיוק במרכז **מבטלים** זה את זה:

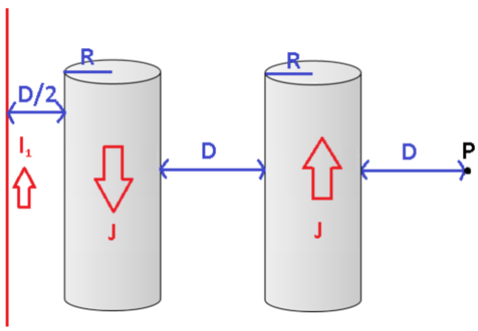
$$\vec{B}_{\text{tot}}=\vec{B}_{\text{right}}\left(r=R+\frac{D}{2}\right)+\vec{B}_{\text{left}}\left(r=-R-\frac{D}{2}\right)$$
$$=\frac{\mu_0 j_0 R^2}{3}\left(\frac{1}{R+\frac{D}{2}}-\frac{1}{R+\frac{D}{2}}\right)\hat{\varphi}=\boxed{0}$$

כאשר את הכיוונים של השדה קל לקבל מחוק יד ימין.

2. אחרי שהופכים את כיוון הזרם בגליל השמאלי נקבל שהוא **יכפיל** את השדה שנוצר מהגליל הימני בדיוק במרכז בניהם:

$$\vec{B}_{\text{tot}}=\frac{\mu_0 j_0 R^2}{3}\left(-\frac{1}{R+\frac{D}{2}}-\frac{1}{R+\frac{D}{2}}\right)\hat{\varphi}=\boxed{-\frac{2\mu_0 j_0 R^2}{3\left(R+\frac{D}{2}\right)}\hat{\varphi}}$$

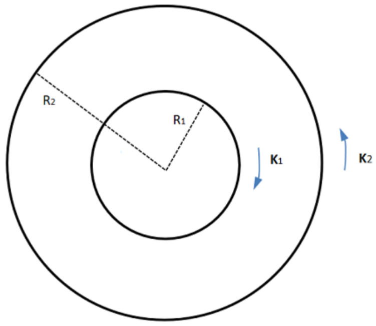
3. עבור המצב החדש:



שוב נשתמש בסופרפוזיציה של השדות:

$$\vec{B}_{\text{tot}}\left(P\right)=\vec{B}_{\text{right}}\left(r=R+D\right)+\vec{B}_{\text{left}}\left(r=3R+2D\right)+\vec{B}_{I_1}\left(r=4R+2.5D\right)$$
$$=\boxed{\frac{\mu_0 j_0 R^2}{3}\left(-\frac{1}{3R+2D}+\frac{1}{R+D}\right)\hat{\varphi}+\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(4R+2.5D\right)}}$$

3 שאלה 7418



נחשב את השדה המגנטי של כל קליפה גלילית בנפרד באמצעות חוק אמפר, כאשר בתרגול 10 ראינו שעבור קליפה עם צפיפות זרם משטחית J בכיוון $\hat{\varphi}$ השדה המגנטי הינו:

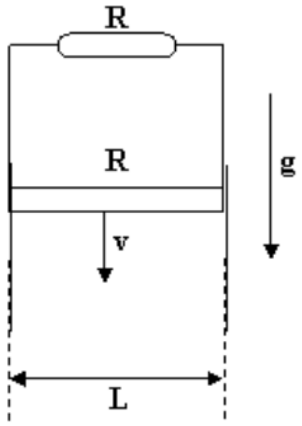
$$\vec{B}=\begin{cases}\mu_0 J\hat{z} & ,r<R\\ 0 & ,r>R\end{cases}$$

כעת מסופרפוזיציה נקבל:

$$\boxed{\vec{B}=\begin{cases}\mu_0\left(K-K\right)\hat{z}=0 & ,r<R_1\\ \mu_0 K\hat{z} & ,R_1<r<R_2\\ 0 & ,R_2<r\end{cases}}$$

*חשוב לשים לב לכיוון הזרמים כפי שסומנו בשאלה.

4 שאלה 7309



1. עבור מהירות v נקבל שהשטח הסגור במעגל הינו :

$$A\left(t\right)=L\cdot y\left(t\right)\Rightarrow\Phi_{B}\left(t\right)=\iint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A}=BLy\left(t\right)$$

ולכן הכא"מ הרגעי יהיה :

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{B}}{\mathrm{d}t}=-BL\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\boxed{-BLv}$$

2. הזרם עבור מהירות זו יתקבל לפי חוק אוהם, כאשר הנגדים מחוברים בטור :

$$I=\frac{\left|\varepsilon\right|}{R_{\text{tot}}}=\frac{\left|\varepsilon\right|}{2R}=\boxed{\frac{BLv}{2R}}$$

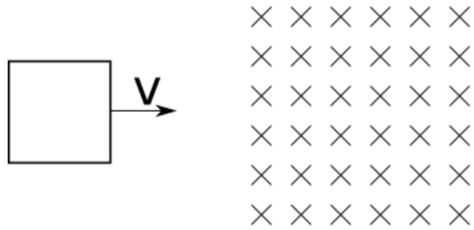
וכיוון הזרם הוא נגד כיוון השעון לפי חוק יד ימין (השטף המגנטי לתוך הלוח והוא גדל, לכן לפי חוק לנץ, הזרם צריך לייצר שדה מגנטי שיתנגד לו, כלומר החוצה מהדף ולכן כיוון הזרם).

3. בשביל לחשב את המהירות המקסימלית נצטרך למצוא את המצב בו אין תאוצה (מקסימום מתקבל כאשר הנגזרת מתאפסת והנגזרת של המהירות היא התאוצה), כלומר סך הכוחות על הנגד שבתנועה צריך להיות אפס. על הנגד פועל כוח הכובד $\vec{F}_{g}=mg$ כלפי מטה ובנוסף פועל עליו כוח לורנץ (זרם בשדה מגנטי) מהצורה $\vec{F}_{B}=ILB$ כלפי מעלה (לפי חוק יד ימין). כך שמאזן הכוחות יהיה :

$$mg=ILB=\frac{B^{2}L^{2}}{2R}\cdot v_{\max}\Rightarrow\boxed{v_{\max}=\frac{2Rmg}{B^{2}L^{2}}}$$

כאשר הצבנו את הזרם למהירות רגעית אשר קיבלנו בסעיף הקודם.

5 שאלה 7403



1. כאשר המסגרת נכנסת לאיזור השדה המגנטי השטף המגנטי גדל, מה שגורם להיווצרות זרם מושרה נגד כיוון השעון (לפי חוק לנץ: השדה שהוא יוצר יוצא מהדף ומקטין את השינוי בשטף שנוצר מהתנועה). אנו נרצה לחשב את הזרם הנוצר לפי כא"מ מושרה: נסמן ב-x את מיקום הקצה הימני של המסגרת ונקבע את האפס כקצה השמאלי של איזור עם השדה:

$$\Phi_B(x) = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Bax$$
$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -Ba\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Bav$$

כאשר השתמשנו בעובדה שנתונה מהירות קבוע $v = {}^{\mathrm{d}x}/_{\mathrm{d}t}$. כעת הזרם המושרה יתקבל לפי חוק אוהם:

$$I = -\frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bav}{R}$$

כעת מפני שיש לנו זרם בתוך שדה מגנטי יפעל עליו כוח לורנץ לפי:

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} = -\frac{B^2a^2v}{R}\hat{x}$$

כאשר $\vec{L}$ הוא החלק מהלולאה שהזרם עובר בו ונמצא בהשפעת השדה המגנטי ומקבלים שהתרומה מהחלקים האופקיים מתבטלת כך שבסך הכל:

$$\vec{L} \times \vec{B} = xB(\hat{x} \times (-\hat{z})) + aB(\hat{y} \times (-\hat{z})) + xB((-\hat{x}) \times (-\hat{z})) = -aB\hat{x}$$

הכוח הדרוש לשמור את המסגרת במהירות קבוע יהיה שווה בגודלו והפוך בכיוונו לכוח לורנץ על מנת לשמור על התאוצה אפס, כלומר:

$$\vec{F}_{\text{out}} = -\vec{F}_B = \boxed{\frac{B^2a^2v}{R}\hat{x}}$$

2. את ההספק המכני נחשב לפי הנוסחה:

$$P_{\text{mech}} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int F\mathrm{d}x = F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Fv = \boxed{\frac{B^2a^2v^2}{R}}$$

כאשר השתמשנו בעובדה שהכוח לא משתנה בזמן כי כל הרכיבים בו הם קבועים (גודל השדה, המהירות, אורך הצלע וההתנגדות).

3. עבור ההספק החשמלי נשתמש בנוסחה:

$$P_{\text{electric}} = I^2R = \left(\frac{Bav}{R}\right)^2 R = \boxed{\frac{B^2a^2v^2}{R}}$$

וניתן לראות שהוא חייב להיות זהה להספק המכני.