מבוא לשיטות מתמטיות לפיסיקאים - תרגול 13 - תרגול חזרה

תרגיל 1 **-** 2019 **מועד א**

פתחו את הפונקציה $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}$ לטור חזקות של x עד סדר x^3, כולל.

פתרון

$$\cos^2 x=\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)\right)^2=1-x^2+\mathcal{O}(x^4)$$

מכיוון שכאשר $x\to 0$ גם $2\sin^3 x\to 0$ נגדיר $2\sin^3 x=y$ ונפתח

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}&=(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{y}{2}+\frac{3}{8}y^2+\mathcal{O}(y^3)\\&=1-\sin^3 x+\frac{3}{2}\sin^6 x+\mathcal{O}((\sin x)^9)=1-\left(x-\frac{x^3}{6}\dots\right)^3+\mathcal{O}(x^6)=1-x^3+\mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+2\sin^3 x}}=\left(1-x^2+\mathcal{O}(x^4)\right)\left(1-x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)=1-x^2-x^3+\dots$$

תרגיל 2 **-** 2019 **מועד ב**

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x-20=25t$$

פתרון

נרשום משוואה ליניארית זו בצורה הסטנדרטית

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = g(t)$$

כאשר $g(t) = 25t + 20$.
נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית, עם $g(t) = 0$:
ננחש פתרון מהצורה $x(t) = e^{rt}$, הצבתו במשוואה נותנת את המשוואה האופיינית $r^2 + 4r + 5 = 0$ שפתרונותיה נותנים $r_\pm = -2 \pm i$

$$x_\pm(t) = e^{-2t}e^{\pm it} = e^{-2t}\left(\cos t \pm i \sin t\right)$$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא אם כן

$$x(t) = e^{-2t}\left(a \cos t + b \sin t\right)$$

כאשר a ו-b הם קבועים שרירותיים. צורתה של $g(t)$ מובילה אותנו לנחש פתרון פרטי למשוואה המקורית מהצורה $\tilde{x}(t) = At + B$ כאשר A ו-B הם קבועים שאותם עדיין צריך למצוא.
הצבת פתרון זה במשוואה נותנת

$$5At + 4A + 5B = 25t + 20$$

מהשוואת האיברים הליניאריים ב-t בשני אגפי המשוואה מקבלים $A = 5$, ואז מהשוואת האיברים הקבועים מקבלים $B = 0$, מה שנותן לנו את הפתרון הפרטי

$$\tilde{x}(t) = 5t$$

הפתרון הכללי של המשוואה המקורית יהיה הסכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית והפתרון הפרטי, כלומר

$$x(t) = e^{-2t}\left(a \cos t + b \sin t\right) + 5t$$

כאשר a ו-b הם קבועים שרירותיים.

תרגיל 3 - 2019 מועד ב

נתון גביע גלידה בצורת חרוט (קונוס) שגובהו h ורדיוס הפתח שלו R, כך שמעטפת הגביע מתוארת על ידי המשוואה

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2\,, \quad 0 \le z \le h$$

הגביע מלא בגלידה בעל צפיפות אחידה ρ.

(א) חשבו את מסת הגלידה M על ידי חישוב האינטגרל

$$M = \iiint dm = \iiint \rho \, dV$$

(ב) חשבו את גובה מרכז המסה של הגלידה, כלומר את האינטגרל

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \iiint z \, dm = \frac{1}{M} \iiint z \, \rho \, dV$$

פתרון

(א) מכיוון ש-ρ קבוע, ניתן להוציא אותו מחוץ לאינטגרל, $M = \rho \iiint dV$, ונשאר לחשב את הנפח.
נשים לב שחיתוך הנפח במאונך לציר z נותן עיגולים עם רדיוס Rz/h, כלומר שטח $\pi R^2 z^2/h^2$. אז נשאר רק לעשות אינטגרציה לפי z:

$$M = \frac{\pi R^2 \rho}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rho$$

(ב) מכיוון שהאינטגרנד תלוי רק ב-z, גם כאן ניתן לחשב את שטחי העיגולים בנפרד ולעשות אינטגרציה רק לפי z:

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \frac{\pi R^2 \rho}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2 \rho}{4M} = \frac{3}{4} h$$

תרגיל 4 - 2020 מועד א

חשבו את הנגזרת של הפונקציה

$$f(x) = x^{1/x}$$

פתרון

נרשום

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

ונגזור את שני האגפים:

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$$

נציב $f(x) = x^{1/x}$ ונקבל

$$f'(x) = (1 - \ln x) \, x^{1/x - 2}$$

תרגיל 5 **-** 2018 **מועד ב**

הוכיחו את הזהות הבאה על ידי שימוש בכתיב האינדקסים :

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\vec{A}^2\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

פתרון

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=&\epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{i\ell m}A_\ell C_m\\ =&\epsilon_{jki}\epsilon_{i\ell m}A_jB_kA_\ell C_m=\left(\delta_{j\ell}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{k\ell}\right)A_jB_kA_\ell C_m\\ =&A_jA_jB_kC_k-A_jC_jA_kB_k=\vec{A}^2\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\end{aligned}$$

תרגיל 6 **-** 2020 **מועד ב**

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(א) $\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\ e^{-x^2-y^2}$

(ב) $\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}$

פתרון

(א) נשים לב שזה כמו גאוסיאן רק עם שינוי בגבולות, אין כאן את כל המישור אלא רק את החצי העליון, כלומר כשנעבור לפולרי הגבולות יהיו

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\ e^{-x^2-y^2}=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dr\ re^{-r^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}du\ e^{-u}=\frac{\pi}{2}$$

(ב) נחליף את סדר הגבולות

$$\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}=\int_0^{y}dx\int_0^{\pi}dy\ \ \frac{\sin y}{y}=\int_0^{\pi}dy\ \ \sin y=-\cos y|_0^{\pi}=2$$

תרגיל 7 - 2019 מועד א

מצאו פונקציה $f(\vec{r})$ המקיימת

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \left(\ln(yz) \,,\ \frac{x}{y} - z \,,\ \frac{x}{z} - y \right)$$

פתרון

מרכיב ה-x של המשוואה הנ"ל,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \ln(yz)$$

נקבל

$$f(x,y,z) = x\ln(yz) + C(y,z)$$

נציב זאת ברכיב ה-y של המשוואה,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x}{y} - z$$

ונקבל

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -z$$

כלומר

$$\begin{aligned} C(y,z) &= -yz + C(z) \\ f(x,y,z) &= x\ln(yz) - yz + C(z) \end{aligned}$$

נציב זאת ברכיב ה-z של המשוואה,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{x}{z} - y$$

ונקבל

$$\frac{dC(z)}{dz} = 0$$

מכאן

$$f(x,y,z) = x\ln(yz) - yz + C$$

תרגיל 8 - 2019 מועד ב

בדקו את משפט סטוקס

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה

$$\vec{F}=(y,\,\sin z,\,0)$$

כאשר S הוא שטח הפנים של קובייה, פרט לפאה התחתונה שלה אשר מתוארת על ידי

$$0\le x\le 1\,,\quad 0\le y\le 1\,,\quad z=0$$

ומוגדרת לא להיות חלק מ-S. שאר הקובייה נמצאת ב-$z>0$.
עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) חשבו את $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר C היא השפה של S (כיוון המסלול הוא לבחירתכם).

(ב) חשבו את $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

(ג) חשבו את $\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS$ כאשר הצד אליו פונים וקטורי הנורמל $\hat{n}$ הוא בהתאמה עם כיוון המסלול שבחרתם לעיל.

פתרון

(א) נכתוב את האינטגרל כ-

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)$$

השפה C מורכבת מצלעות הפאה התחתונה של הקוביה, ורק אחד משלושת האיברים תורם בכל צלע. נקבל

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1 0\,dx+\int_0^1 0\,dy+\int_1^0 1\,dx+\int_1^0 0\,dy=-1$$

כאשר הלכנו נגד כיוון השעון.

(ב)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F}=&\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & \sin z & 0\end{vmatrix}\\ =&\hat{x}\left(0-\frac{\partial}{\partial z}\sin z\right)-\hat{y}\left(0-\frac{\partial}{\partial z}y\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin z-\frac{\partial}{\partial y}y\right)\\ =&\left(-\cos z,\,0,\,-1\right)\end{aligned}$$

(ג) מכיוון ש-$\vec{\nabla}\times\vec{F}$ אינו תלוי ב-x ו-y, אין תרומה לשטף מהפאות האנכיות כי השטף שנכנס דרך פאה אחת יוצא דרך הפאה שממול. נשאר לחשב את השטף היוצא דרך הפאה העליונה, שנסמנה P. בהתאם לבחירת הכיוון של C בסעיף (ב), $\hat{n}=+\hat{z}$, אז מקבלים

$$\iint_P \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dS=\iint_P(-\cos z,0,-1)\cdot(0,0,1)\ dS=-\iint_P dS=-1$$