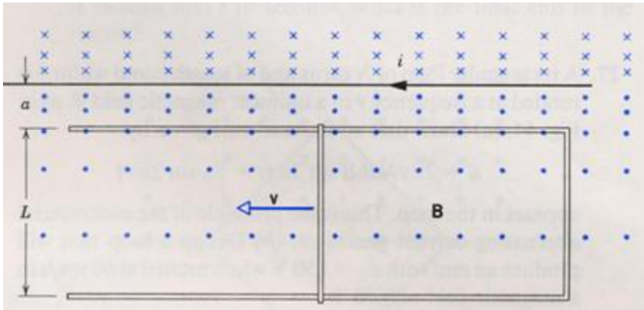
פתרון עבודה 12 - חוק פאראדיי, מעגלי RL ו-LC

פיזיקה 2ג - 203.1.1431

סתיו 2023

1 שאלה



1. נבחר את מערכת הצירים ככה ש- $\hat{x}$ הוא לכיוון תנועת המוט וראשיתו בתחילת המסגרת, $\hat{y}$ הוא לכיוון מטה וראשיתו בתיל כך ש-$\hat{z}$ יוצא מהדף. נחשב ראשית את השטף המגנטי, כאשר נשים לב שהשדה המגנטי אינו אחיד במרחב והשטח משתנה בזמן:

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat{z}$$

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^x \mathrm{d}x \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\mathrm{d}y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} x \cdot \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

מכאן ניתן לחשב את הכא"מ, כאשר נזכור כי עבור תנועה במהירות קבועה מתקיים $x = vt$:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \boxed{-\frac{\mu_0 i}{2\pi} v \cdot \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)}$$

2. את הזרם המושרה נחשב לפי חוק אוהם:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \boxed{\frac{\mu_0 i}{2\pi R} v \cdot \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)}$$

ומפני שהשטף המגנטי בכיוון $\hat{z}$ הולך וגדל, לפי חוק לנץ נקבל שהוא צריך להיות **בכיוון השעון** כדי לייצר שדה שיתנגד לו.

3. קצב יצור האנרגיה או במילים אחרות הספק יחושב לפי:

$$P = RI^2 = \boxed{\frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i}{2\pi} v \cdot \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)\right]^2}$$

4. נחשב איזה כוח השדה המגנטי מפעיל על המוט:

$$\vec{F}_B = \int_a^{a+L} IB(y)\,\mathrm{d}y\,(-\hat{x}) = -\frac{\mu_0 i I}{2\pi}\int_a^{a+L}\frac{1}{y}\mathrm{d}y\hat{x} = -\frac{\mu_0 i I}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)\hat{x}$$

ולכן הכוח שצריך להפעיל יהיה שווה לו בגודלו והפוך בכיוון (בנוסף נציב את הערך של I):

$$\vec{F}_{\text{out}}=-\vec{F}_B=\boxed{\frac{v}{R}\left[\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{a}\right)\right]^2\hat{x}}$$

5. העבודה שהכוח החיצוני מפעיל על המוט נתונה לפי:

$$W_{\text{out}}=\int\vec{F}_{\text{out}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

לכן ההספק (קצב העבודה) יהיה:

$$P_{\text{out}}=\frac{\mathrm{d}W_{\text{out}}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{\text{out}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{\text{out}}\cdot\vec{v}=\boxed{\frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 i}{2\pi}v\ln\left(1+\frac{L}{a}\right)\right]^2=RI^2}$$

כאשר השתמשנו בעובדה שהכוח לא תלוי בזמן ובכך שכיווני המהירות והכוח הם $\hat{x}$.

6. כא"מ מושרה גם ללא מסגרת. תמיד נוכל לדמיין מסגרת בעלת התנגדות אינסופית שבתוכה עובר השטף, פשוט לא יהיה זרם.

2 שאלה 9303

1. במעגל LC אנרגיה יכולה להיות אגורה גם בקבל וגם במשרן.

2. האנרגיה במעגל נתונה לפי:

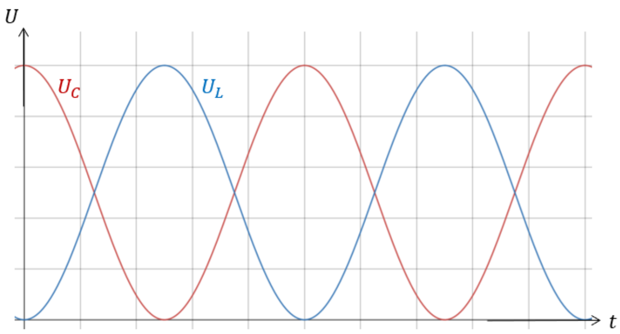
$$U = U_L + U_C = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

3. ראינו בהרצאה ובתרגול שבמעגל LC המטען והזרם משתנים בצורה מחזורית לפי:

$$Q(t) \sim \cos(\omega t)\ ;\ I(t) \sim \sin(\omega t)$$

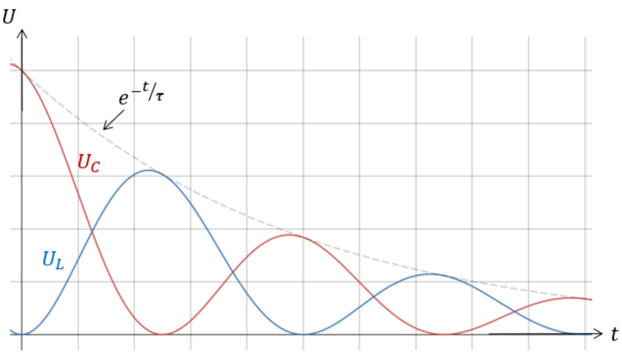
לכן האנרגיה ברכיבים תשתנה לפי:

$$U_C \sim \cos^2(\omega t)\ ;\ U_L \sim \sin^2(\omega t)$$



4. נגד גורם לבזבוז אנרגיה, לכן השינוי יהיה בדעיכה אקספוננציאלית של האנרגיות בתוספת לשינוי המחזורי שלהן, כלומר:

$$U_C \sim e^{-t/\tau}\cos^2(\omega t)\ ;\ U_L \sim e^{-t/\tau}\sin^2(\omega t)$$



ניתן לראות את הדעיכה בכך שהאנרגיה במערכת חסומה על ידי מעטפת מהצורה $e^{-t/\tau}$ (מסומנת בקו בקיטועים).

3 שאלה 9904

1. מדובר במעגל LC עם תנאי התחלה $Q\left(t=0\right)=10\mu\text{C}$ ו-$I\left(t=0\right)=0$, מכאן שניתן לחשב את הזרם במעגל כתלות בזמן:

$$[F]=\frac{s^4\cdot A^2}{kg\cdot m^2}$$
$$[H]=\frac{kg\cdot m^2}{s^2\cdot A^2}$$

$$\begin{aligned}
L\dot{I}+\frac{Q}{C}=L\ddot{Q}+\frac{Q}{C}=0\Rightarrow Q\left(t\right)=Q_0\cos\left(\omega t+\phi\right)\\
\Rightarrow I\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-Q_0\omega\sin\left(\omega t+\phi\right)\\
I\left(t=0\right)=-Q_0\omega\sin\left(\phi\right)=0\Rightarrow\phi=\sin^{-1}\left(0\right)=0\\
Q\left(t=0\right)=Q_0\cos\left(0\right)=Q_0=10\\
\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{3\cdot 8}}=0.204\left[\text{MHz}\right]\\
\Rightarrow I\left(t\right)=\boxed{-Q_0\omega\sin\left(\omega t\right)=-2.04\sin\left(0.204\cdot 10^6 t\right)\left[\text{A}\right]}
\end{aligned}$$

2. את התדירות הזוויתית ω והפאזה ההתחלתית ϕ כבר חשבנו בסעיף הקודם. זמן המחזור יחושב פשוט לפי:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\boxed{30.8\left[\mu\text{s}\right]}$$

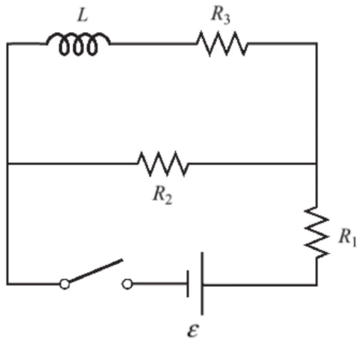
3. הזרם המקסימלי יתקבל כאשר הסינוס מקסימלי, כלומר עבור:

$$\max\left[-\sin\left(\omega t\right)\right]=1\Rightarrow\sin\left(\omega t\right)=-1\Rightarrow\omega t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2\omega}=\boxed{\frac{3T}{4}}$$

4. האנרגיה ברכיבים תתקבל לפי:

$$\begin{aligned}
U_L\left(t\right)=\frac{1}{2}LI^2=\boxed{\frac{1}{2}L{Q_0}^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)}\\
U_C\left(t\right)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\boxed{\frac{1}{2C}{Q_0}^2\cos^2\left(\omega t\right)}\\
U_{\text{tot}}\left(t\right)=U_L\left(t\right)+U_C\left(t\right)=\frac{1}{2}L{Q_0}^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)+\frac{1}{2C}{Q_0}^2\cos^2\left(\omega t\right)\\
\left\{\omega^2=\frac{1}{LC}\right\}=\frac{{Q_0}^2}{2C}\left[\sin^2\left(\omega t\right)+\cos^2\left(\omega t\right)\right]=\boxed{\frac{{Q_0}^2}{2C}}\ \text{(קבוע בזמן)}
\end{aligned}$$

4 שאלה 9207



1. הזרמים:

(א) מיד אחרי סגירת המפסק: הסליל פרוק לגמרי ולכן מהווה **נתק** ולכן המעגל האפקטיבי יהיה רק התחתון והזרם יהיה

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{\text{tot}}}=\boxed{\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}}$$

(ב) לאחר זמן רב מסגירתו: הסליל נטען לגמרי ומהווה **קצר** ונקבל:

$$\boxed{I_1=\frac{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}{\varepsilon}}$$

$$\begin{cases} I_2R_2 &= I_3R_3 \\ I_2+I_3 &= I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{I_2=\dfrac{R_3}{R_2+R_3}I_1} \\ \boxed{I_3=\dfrac{R_2}{R_2+R_3}I_1} \end{array}$$

(ג) מיד לאחר פתיחת המפסק: אין זרם דרך נגד R_1 ונשארים עם מעגל RL אפקטיבי שהזרם ההתחלתי בו הוא **הזרם שהיה בסליל**, כלומר I_3.

(ד) זמן רב לאחר הפתיחה: הסליל יפרק לגמרי ו**לא יזרום זרם במעגל**.

2. קבוע הזמן:

(א) מפסק פתוח: זרם דועך עם התנגדות אפקטיבית $R=R_2+R_3$ ולכן $\boxed{\tau=-{}^{L}/_{R_2+R_3}}$.

(ב) מפסק סגור: זרם מתגבר עם התנגדות אפקטיבית

$$R=R_3+(R_1\parallel R_2)=R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\Rightarrow\boxed{\tau=\frac{L}{R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}}$$