אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 12.2.2023
שם המרצה: ד"ר אבגני כץ
שם המתרגל: תומר דולברג
שם הקורס: מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס: 203.1.1141
שנה: 2023 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

1. [15 נק'] נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1}$$

(א) [5 נק'] חשבו את הגבול של הפונקציה כאשר $x \to 0$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

כאשר בשלב הראשון והשלישי השתמשנו בכלל לופיטל.

ניתן היה לקבל את התוצאה גם על ידי שימוש בקירוב הליניארי:

$$\frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} \simeq \frac{x^2}{1 + x^2 - 1} = 1$$

(ב) [10 נק'] פתחו את הפונקציה לטור חזקות של x עד סדר x^2, כולל.
(עבור הנקודה $x = 0$ נגדיר את הפונקציה להיות שווה לגבול שחושב בסעיף הקודם.)

פתרון:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\end{aligned}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$e^{x^2} - 1 = x^2 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} &= \frac{1 - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - \frac{5}{6}x^2 + \dots\end{aligned}$$

2. [12 נק'] הראו כי

$$\epsilon_{imn}\,\epsilon_{jnp}\,\epsilon_{kpq}\,\epsilon_{\ell qm} = a\,\delta_{ij}\,\delta_{k\ell} + b\,\delta_{i\ell}\,\delta_{jk}$$

כאשר a ו־b הם מספרים שעליכם למצוא.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{imn}\,\epsilon_{jnp}\,\epsilon_{kpq}\,\epsilon_{\ell qm} &= \epsilon_{nim}\,\epsilon_{npj}\,\epsilon_{qkp}\,\epsilon_{qm\ell} \\
&= (\delta_{ip}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mp})\,(\delta_{km}\delta_{p\ell} - \delta_{k\ell}\delta_{pm}) \\
&= \delta_{ip}\delta_{mj}\delta_{km}\delta_{p\ell} - \delta_{ip}\delta_{mj}\delta_{k\ell}\delta_{pm} - \delta_{ij}\delta_{mp}\delta_{km}\delta_{p\ell} + \delta_{ij}\delta_{mp}\delta_{k\ell}\delta_{pm} \\
&= \delta_{i\ell}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ij}\delta_{k\ell} + 3\delta_{ij}\delta_{k\ell} \\
&= \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}
\end{aligned}$$

3. [18 נק'] עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים, קבעו האם התוצאה חיובית, שלילית או אפס. נמקו את קביעתכם באופן מפורט או הציגו חישוב. (לא יינתן ניקוד עבור תשובות שלא תכלולנה נימוק/חישוב רלוונטי.)

(א) $$\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^3} dx$$

פתרון: תחום האינטגרציה סימטרי, הגורם e^{-x^3} קטן מ־1 עבור x חיובי וגדול מ־1 עבור x שלילי, לכן התוצאה שלילית.

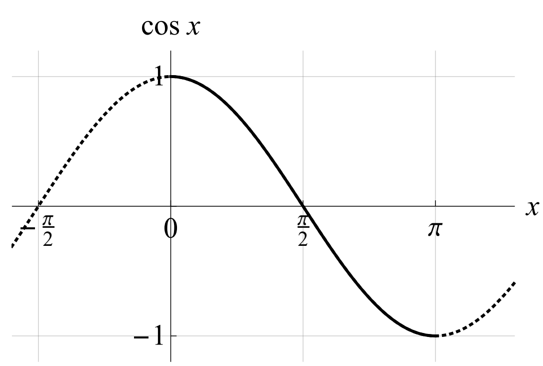
(ב) $$\int_{-\pi/2}^{\pi} x\, e^{-x^2} \cos x\, dx$$

פתרון: האינטגרנד הוא פונקציה אי־זוגית, לכן אין תרומה מהתחום $[-\pi/2,\, \pi/2]$. בתחום $[\pi/2,\, \pi]$ הפונקציה $\cos x$ שלילית, וכך גם האינטגרנד כולו, לכן התוצאה שלילית.

(ג) $$\int_{0}^{\pi} \tanh(\cos^3 x)\, dx$$

פתרון: מכיוון ש־$\cos$ מקיים

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$



והפונקציות x^3 ו־

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

הן אי־זוגיות, התרומה מהתחום $[0,\, \pi/2]$ מתבטלת עם התרומה מהתחום $[\pi/2,\, \pi]$, כך שהתוצאה היא אפס.

4. [15 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

פתרון:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(x\, e^{-x^2} \right) dx \\ &= x \left(-\frac{1}{2}\, e^{-x^2} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\, e^{-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2I)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r\, e^{-r^2} dr \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-u}\, du \\ &= -\pi e^{-u} \Big|_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. [25 נק'] בדקו את משפט גאוס

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

על ידי חישוב ישיר של כל אחד מאגפי המשוואה עבור השדה הנתון בקואורדינטות כדוריות על ידי

$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = \hat{r}\, \sin^2 \phi + \hat{\phi}\, \sin^2 \theta$$

כאשר הנפח V הוא כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1.

עשו זאת בשלבים הבאים:

(א) [7 נק'] חשבו את $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin^2 \phi \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (0) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin^2 \theta \right) \\
&= \frac{1}{r^2}\, 2r \sin^2 \phi + 0 + 0 \\
&= \frac{2}{r} \sin^2 \phi
\end{aligned}$$

(ב) [9 נק'] חשבו את האינטגרל

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 dr\, r^2 \sin \theta\, \frac{2}{r} \sin^2 \phi \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi\, d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta\, d\theta \int_0^1 r\, dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi\, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\phi)\, d\phi = \frac{1}{2} (2\pi - 0) = \pi \\
&\int_0^{\pi} \sin \theta\, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi} = 2 \\
&\int_0^1 r\, dr = \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = 2\pi$$

(ג) [9 נק'] חשבו את שטף השדה היוצא מתוך הנפח:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{r} \, dS \\
&= \oiint_S \sin^2 \phi \, dS \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \; 1^2 \sin\theta \; \sin^2 \phi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו באינטגרלים שכבר חישבנו בסעיף הקודם.

6. [15 נק'] חשבו את האינטגרל הבא, המערב מכפלה וקטורית,

$$\oint_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

עבור השדה

$$\vec{F} = (1,1,0)\, xy$$

כאשר C הוא המסלול המלבני הבא במישור xy:

$$(0,0) \to (a,0) \to (a,b) \to (0,b) \to (0,0)$$

a, b הם קבועים נתונים.

פתרון:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} xy = \hat{z}\,(dy - dx)\, xy$$

כאשר הצבנו $dz = 0$ כי המסלול C הוא במישור xy. נשים לב שהתרומה מהמקטע $(0,0) \to (a,0)$ מתאפסת כי $y = 0$, והתרומה מהמקטע $(0,b) \to (0,0)$ מתאפסת כי $x = 0$. שני המקטעים הנותרים נותנים

$$\oint_C \vec{F} \times d\vec{r} = \hat{z} \left(a \int_0^b y\, dy - b \int_a^0 x\, dx \right) = \hat{z} \left(a\, \frac{y^2}{2} \bigg|_0^b - b\, \frac{x^2}{2} \bigg|_a^0 \right) = \frac{1}{2}\,(a+b)\, a\, b\, \hat{z}$$